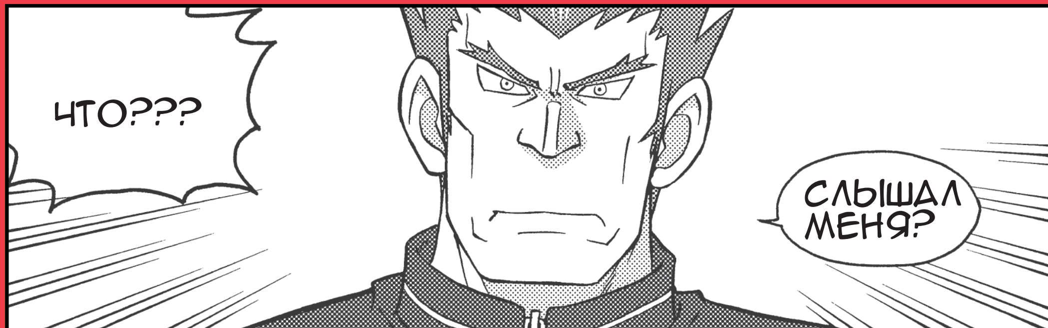
ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА



ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА, КОТОРУЮ "СОЧИНЯЮТ" МАТЕМАТИКИ, ЛИБО ТУМАННА, ЛИБО АБСТРАКТНА, А БОЛЬШИНСТВО УЧЕБНИКОВ И КУРСОВ ПОДРАЗУМЕВАЮТ ДЛИННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПОДРОБНЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. ЭТО СКУЧНО И НЕПРОДУКТИВНО!

В ЭТОЙ МАНГЕ РАССКАЗЫВАЕТСЯ О ТОМ, КАК РЕЙХИ ЮУРИНО, ХИЛЫЙ СТУДЕНТ-МАТЕМАТИК, ОЧЕНЬ ХОЧЕТ СТАТЬ СИЛЬНЫМ И ПОЭТОМУ МЕЧТАЕТ ПОСТУПИТЬ В КЛУБ КАРАТИСТОВ. КАПИТАН КЛУБА СОГЛАСЕН ПРИНЯТЬ НОВИЧКА ПРИ УСЛОВИИ, ЧТО ТОТ ПОМОЖЕТ ЕГО МЛАДШЕЙ СЕСТРЁНКЕ МИСЕ, У КОТОРОЙ ПРОБЛЕМЫ С МАТЕМАТИКОЙ. В ИТОГЕ МИСА УЗНАЁТ О МАТРИЦАХ И ВЕКТОРАХ И ДЕЙСТВИЯХ НАД НИМИ, О МНОЖЕСТВАХ И ПОДМНОЖЕСТВАХ, О БАЗИСАХ И ДРУГИХ "ПРЕМУДРОСТЯХ" ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.

ХОТЯ ЭТА ДИСЦИПЛИНА И КАЖЕТСЯ АБСТРАКТНОЙ, ОНА НАХОДИТ МНОЖЕСТВО ПРИМЕНЕНИЙ: В АРХИТЕКТУРЕ, ПРЕДСКАЗАНИИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ, ЗАЩИТЕ МОРСКОЙ ФЛОРЫ И ФАУНЫ, КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ И ДР.

КНИГА МОЖЕТ БЫТЬ ПОЛЕЗНА СТУДЕНТАМ УНИВЕРСИТЕТОВ, УЧАЩИМСЯ СТАРШИХ КЛАССОВ И КОЛЛЕДЖЕЙ, КОТОРЫЕ ГОТОВЯТСЯ К ПОСТУПЛЕНИЮ В ТЕХНИЧЕСКИЕ ВУЗЫ, А ТАКЖЕ ВСЕМ, КТО ЦЕНИТ ЧУВСТВО ЮМОРА И ПИТАЕТ ИНТЕРЕС К МАТЕМАТИКЕ!

ISBN 978-5-97060-599-8

Интернет-магазин: www.dmkpress.com
Книга-почтой: orders@alians-kniga.ru
Оптовая продажа: "Альянс-книга". (499)782-3889. books@alians-kniga.ru

издательство
www.дмк.рф

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

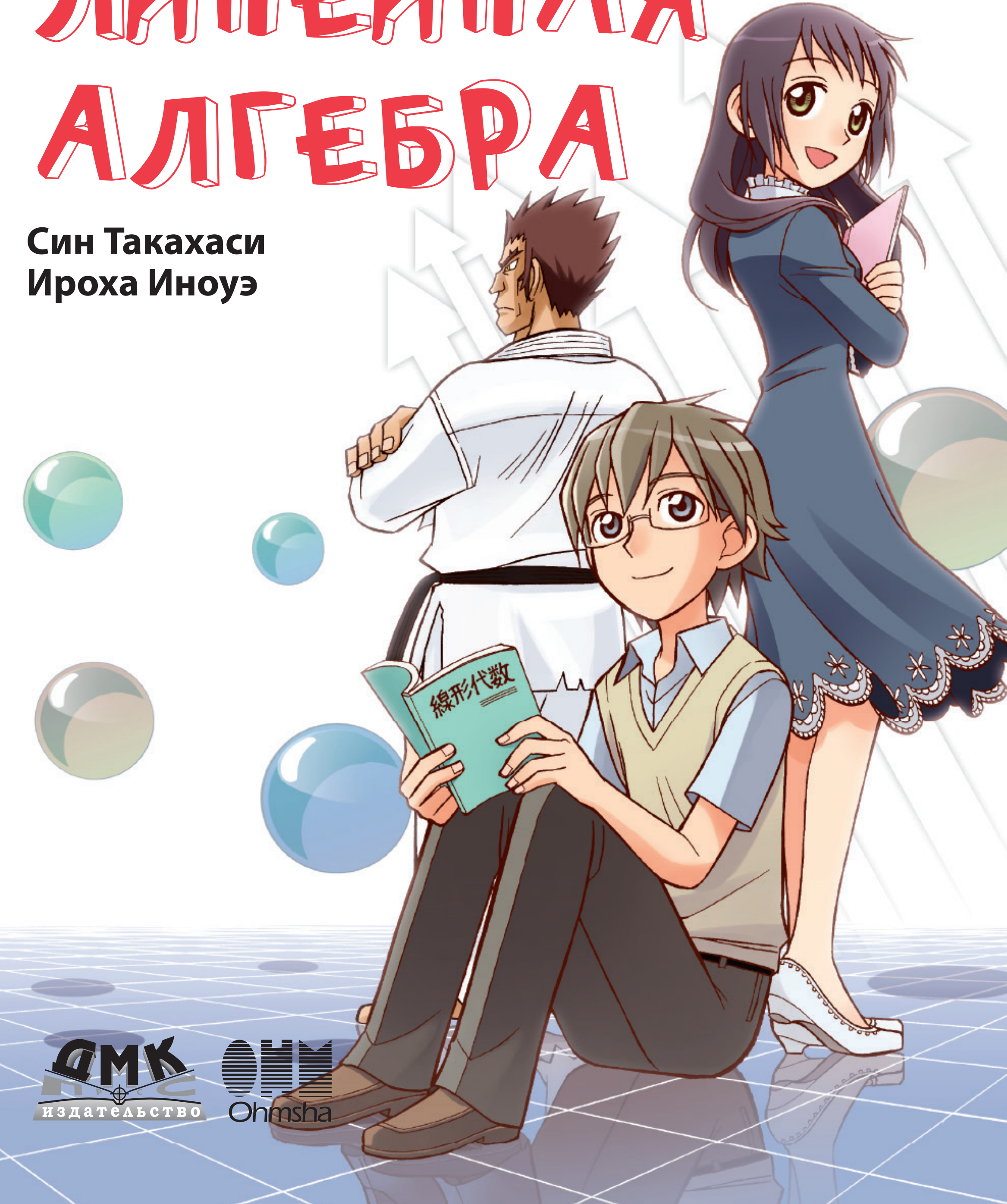
Син Такахаси
Ироха Иноуэ
Office sawa

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

МАНГА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Син Такахаси
Ироха Иноуэ



издательство
Ohmsha

Занимательная математика

Линейная алгебра

Манга

マンガでわかる

線形代数

高橋　信／著
井上　いろは／作画
トレンド・プロ／制作

Ohmsha

ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Син Такахаси

Художник Ироха Иноуэ

Перевод
Т. И. Сенниковой,
А. С. Слащевой

ДМК ПРЕСС ИЗДАТЕЛЬСТВО

Москва
ДМК Пресс, 2018

УДК 512.6
ББК 22.143
Т15

Такахаси С.

Т15 Занимательная математика. Линейная алгебра. Манга / Син Такахаси (автор), Ироха Иноуэ (худ.); пер. Т. И. Сенниковой, А. С. Слащевой. — М.: ДМК Пресс, 2018. — 270 с.: ил. — (Серия «Образовательная манга»). — Доп. тит. л. яп.

ISBN 978-5-97060-599-8

Линейная алгебра, которую «сочиняют» математики, либо туманна, либо абстрактна, а большинство учебников и курсов подразумевают длинные вычисления и подробные доказательства. Это скучно и непродуктивно!

В манге рассказывается о том, как Рейхи Юурино, хилый студент-математик, очень хочет стать сильным и поэтому мечтает поступить в клуб каратистов. Капитан клуба согласен принять новичка при условии, что тот поможет его младшей сестренке Мисе, у которой проблемы с математикой. В итоге Миса узнает о матрицах, векторах и действиях над ними, о множествах и подмножествах, о базисах и других «премудростях» линейной алгебры.

Хотя эта дисциплина и кажется абстрактной, она находит множество применений в таких областях, как архитектура, предсказание землетрясений, защита морской флоры и фауны, а также в компьютерной графике.

Книга может быть полезна студентам университетов, учащимся старших классов и колледжей, а также всем, кто ценит чувство юмора и питает интерес к математике!

УДК 512.6
ББК 22.143

Manga de Wakaru Senkei Daisū (Manga: Guide to Linear Algebra)
By Shin Takahashi (Author), Iroha Inoue (Illustrator)
and Trend Pro Co. (Producer)
Published by Ohmsha, Ltd.

ISBN 978-4-274-06741-9 (яп.)
ISBN 978-5-97060-599-8 (рус.)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга рассчитана на читателя, желающего за весьма короткое время сформировать правильное понимание линейной алгебры.

Наибольшую пользу от «Линейной алгебры» могут получить:

- студенты университетов, желающие освоить линейную алгебру или уже находящиеся в процессе ее изучения и нуждающиеся в пояснениях;
- учащиеся, которые «проходили» линейную алгебру ранее, но так и не поняли, о чем она;
- учащиеся старших классов и колледжей, готовящихся к поступлению в технические вузы;
- и все те, кто ценит чувство юмора и питает интерес к математике!

Книга состоит из следующих разделов:

- глава 1 «Что такое линейная алгебра?»;
- глава 2 «Основы»;
- глава 3 и 4 «Матрицы»;
- глава 5 и 6 «Векторы»;
- глава 7 «Линейные преобразования»;
- глава 8 «Собственные числа и собственные векторы».

Большинство глав включают в себя раздел-мангу и раздел с текстом. Если читать только мангу и пропускать текст, то получишь краткий обзор каждой темы, но я рекомендую прочитать все составные части, а затем для максимального результата рассмотреть каждую тему подробнее. Эта книга представляет собой дополнение к другой, более сложной и углубленной литературе, но не ее замену.

Я хотел бы выразить благодарность моему издателю и всему издательству Омша за предоставленную возможность опубликовать эту книгу, а также иллюстратору Ирохе Иноуэ. Также хочу выразить признательность re_akino, написавшему сценарий, и всему персоналу Trend Pro, работавшему над превращением моей рукописи в эту мангу. Также я получил много полезных советов от Кадзуюки Хираока и Сидзуки Хори. Спасибо всем.

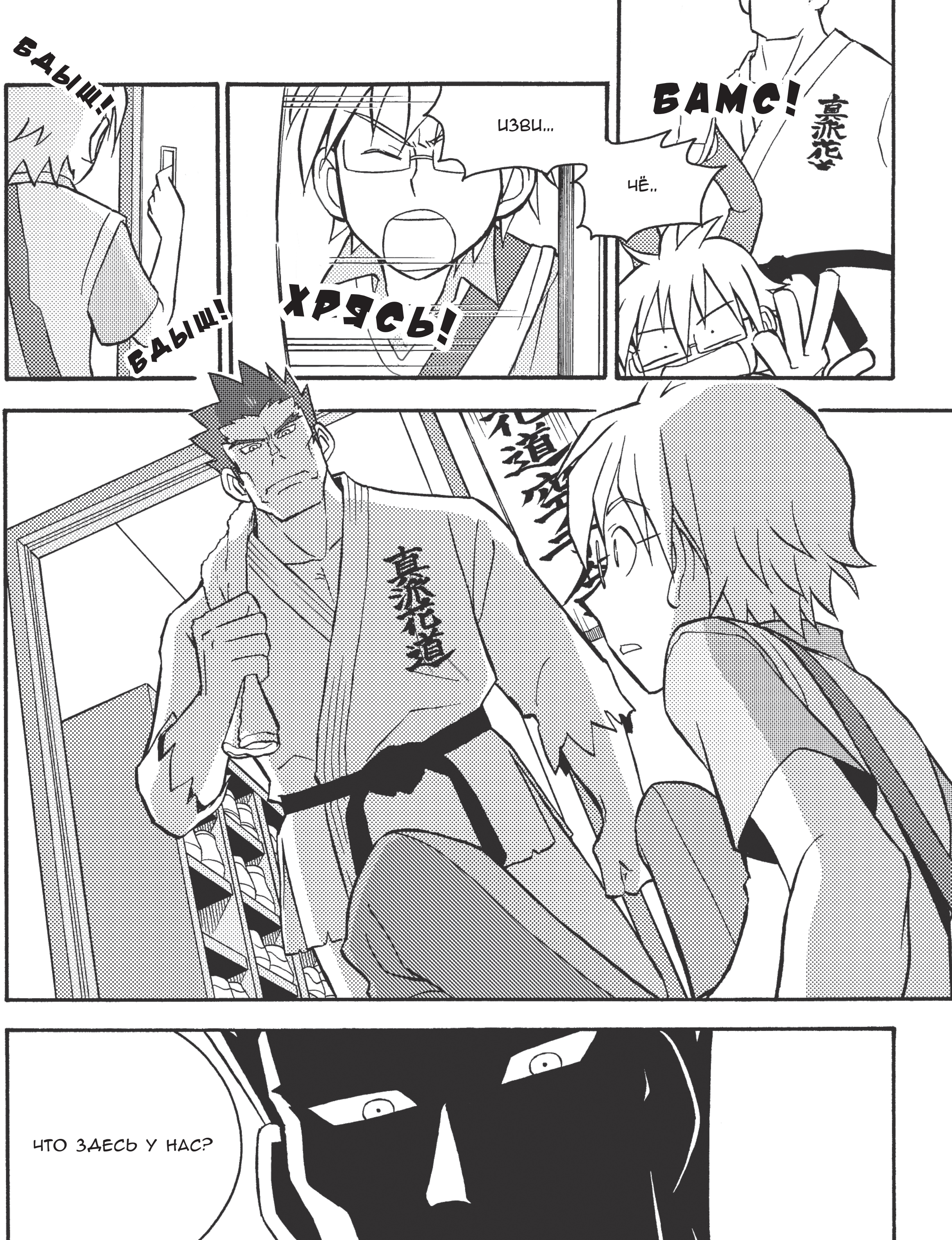
Ноябрь 2008 года
Син Такахаси

СОДЕРЖАНИЕ

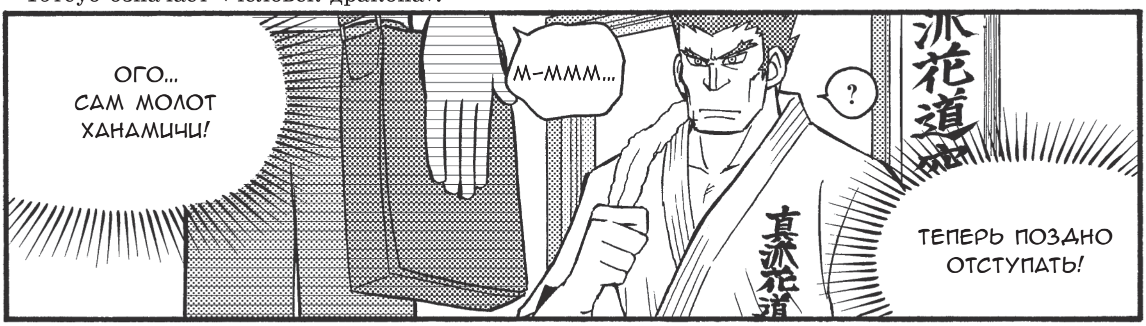
ПРОЛОГ

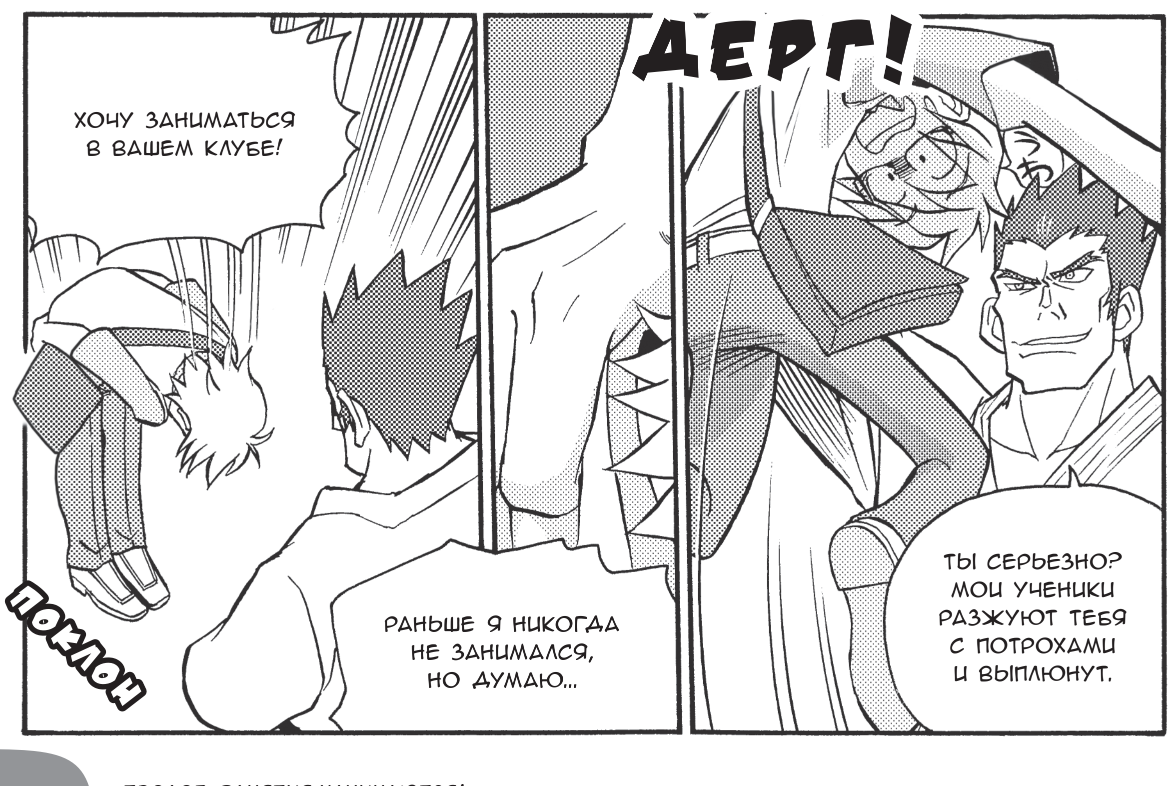
ЗАНЯТИЯ НАЧИНАЮТСЯ!

* Клуб карате Университета Ханамичи


БДЫЩ!
БДЫЩ!
ХРЯСЬ!
ИЗВИ...
ЧЁ..
БАМС!
ЧТО ЗДЕСЬ У НАС?

* Тэтсуо означает «человек дракона».






Прошу вас! Я...
Я хочу стать сильным!
ТРЯХ!
ТРЯХ!
......
Гмм?
А я тебя раньше нигде не видел?
Хмм...
АГА!

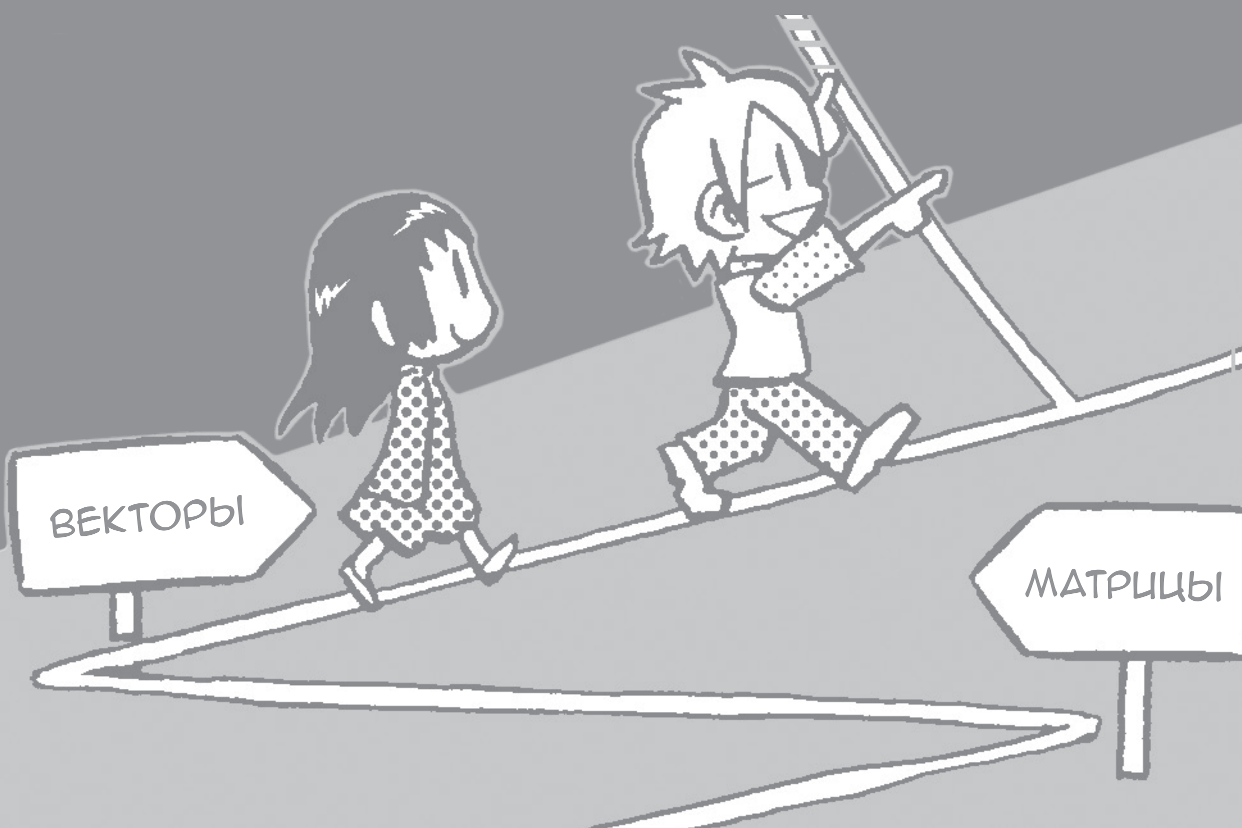

НЕ ТОТ ЛИ ТЫ ПАРЕНЬ С ОБЛОЖКИ УЧЕБНИКА ПО МАТЕМАТИКЕ МОЕЙ СЕСТРЫ?
Математика для всех
Рейхи Юурино
От ученика – ученикам
О, ВЫ ВИДЕЛИ МОЙ УЧЕБНИК?
ЗНАЧИТ, ЭТО ТЫ!
МОЖЕТ, Я ФИЗИЧЕСКИ И НЕ ТАК СИЛЕН...
...НО ВСЕГДА С ЛЕГКОСТЬЮ СПРАВЛЯЛСЯ С ЧИСЛАМИ.
ПОНЯТНО...
ГММ
ВОЗМОЖНО, Я И ВОЗЬМУ ТЕБЯ В КЛУБ...
ДА?
Д-ДА.

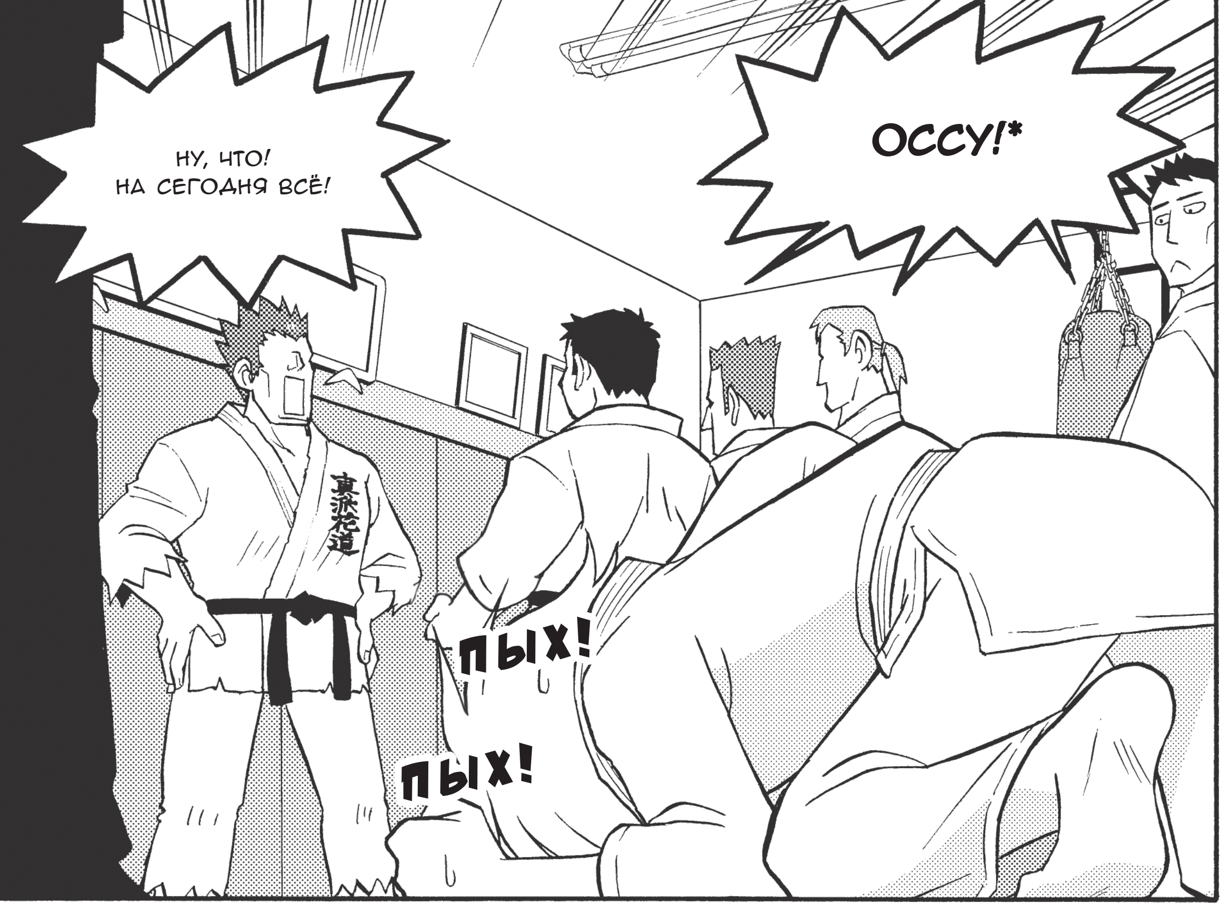
Правда?
...но при одном условии!
Будешь учить мою сестренку математике.
Эээ.
Она-то вот никогда не была сильна в числах...
И только вчера жаловалась, что у нее проблемы на занятиях по линейной алгебре...
Значит, если я помогу вашей сестре, вы возьмете меня в клуб?


Принимаешь такие условия?
Ну, конечно!
Но должен тебя предупредить...
Попробуешь к ней подкатить...
Хоть раз...
Хрусть!
Щелк!
И не подумаю!
В таком случае... иди за мной.
С тобой тут церемониться не будут.
Ясное дело!
Прямо сейчас и начнем!
真派花道空手会
Меня приняли!

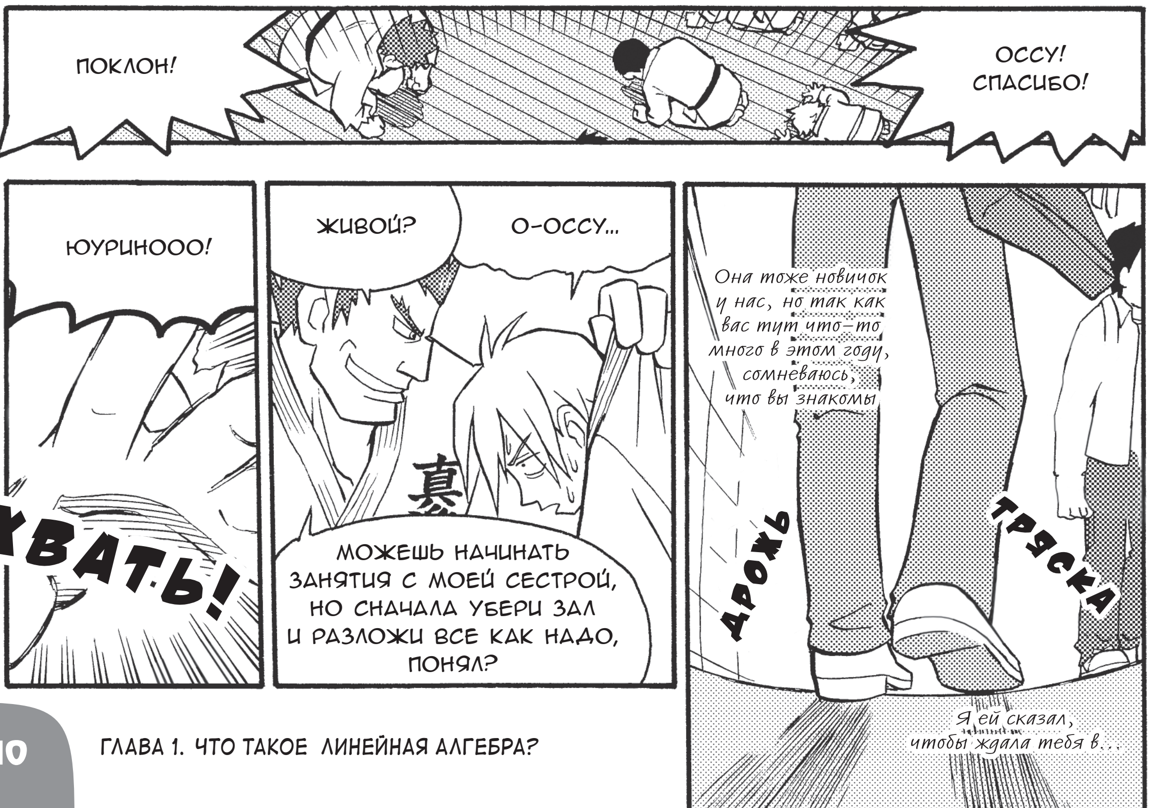
ГЛАВА 1

ЧТО ТАКОЕ ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА?

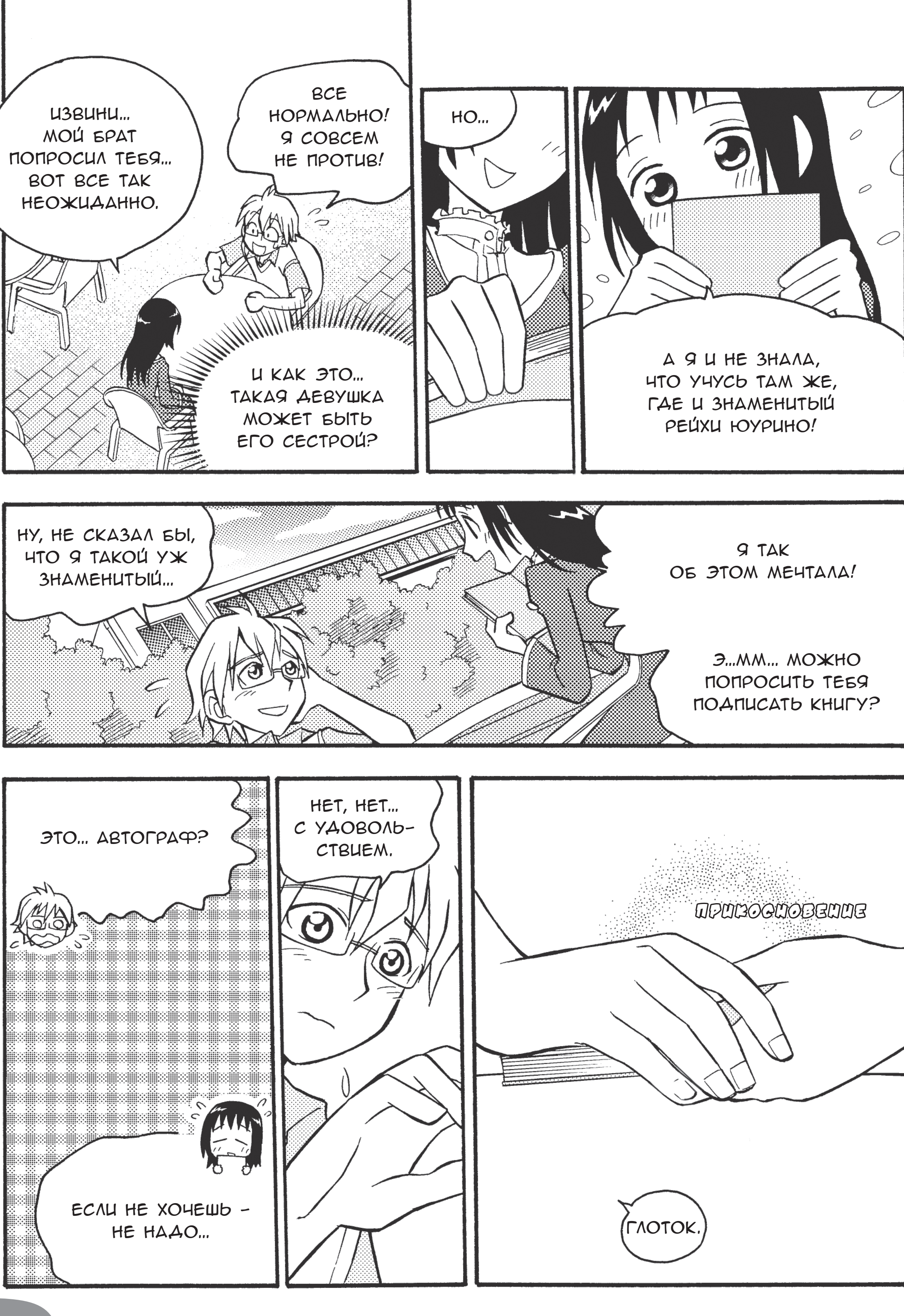




* *Оссу* – междометие, которое часто используется в японских единоборствах, чтобы повысить концентрацию и силу удара.

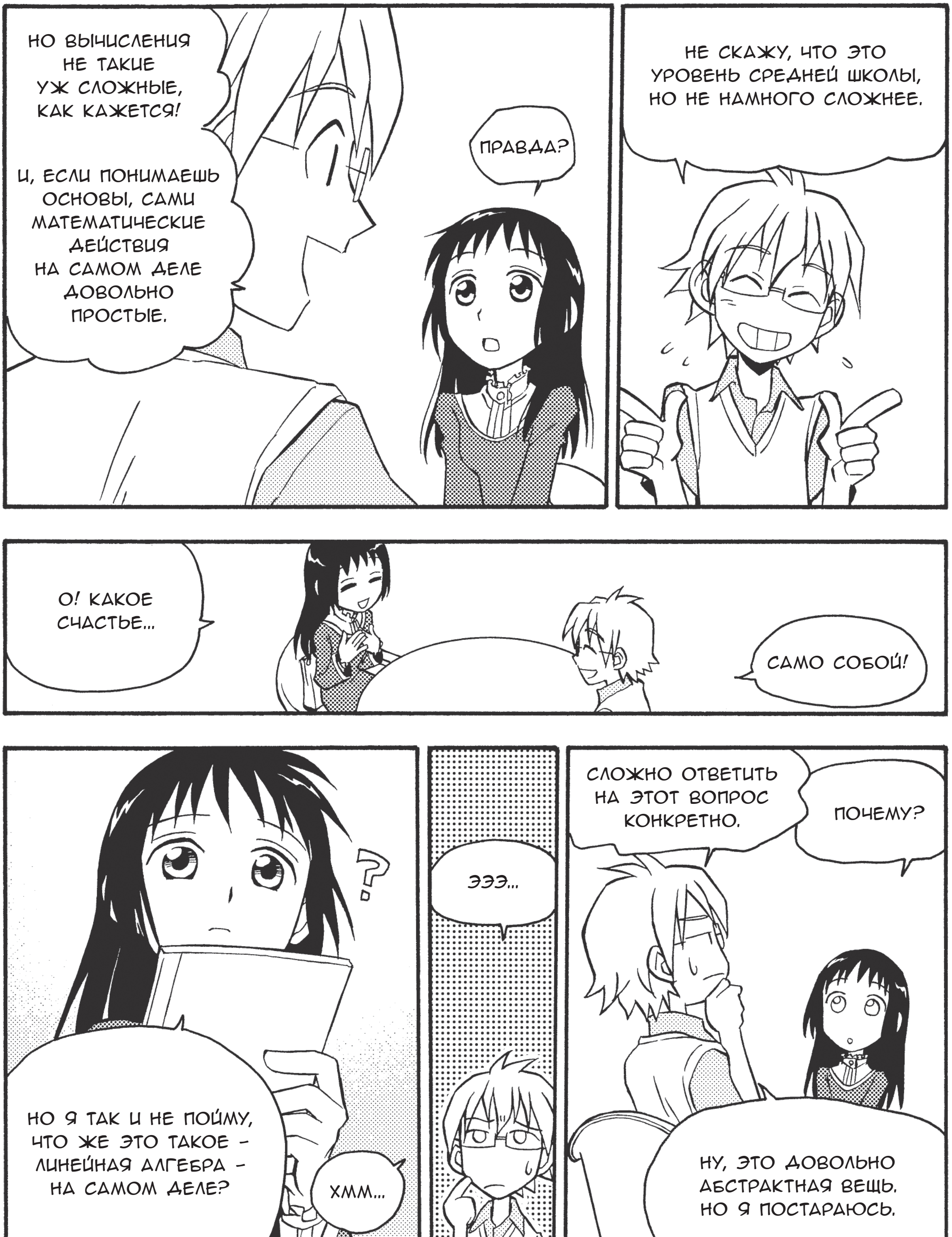


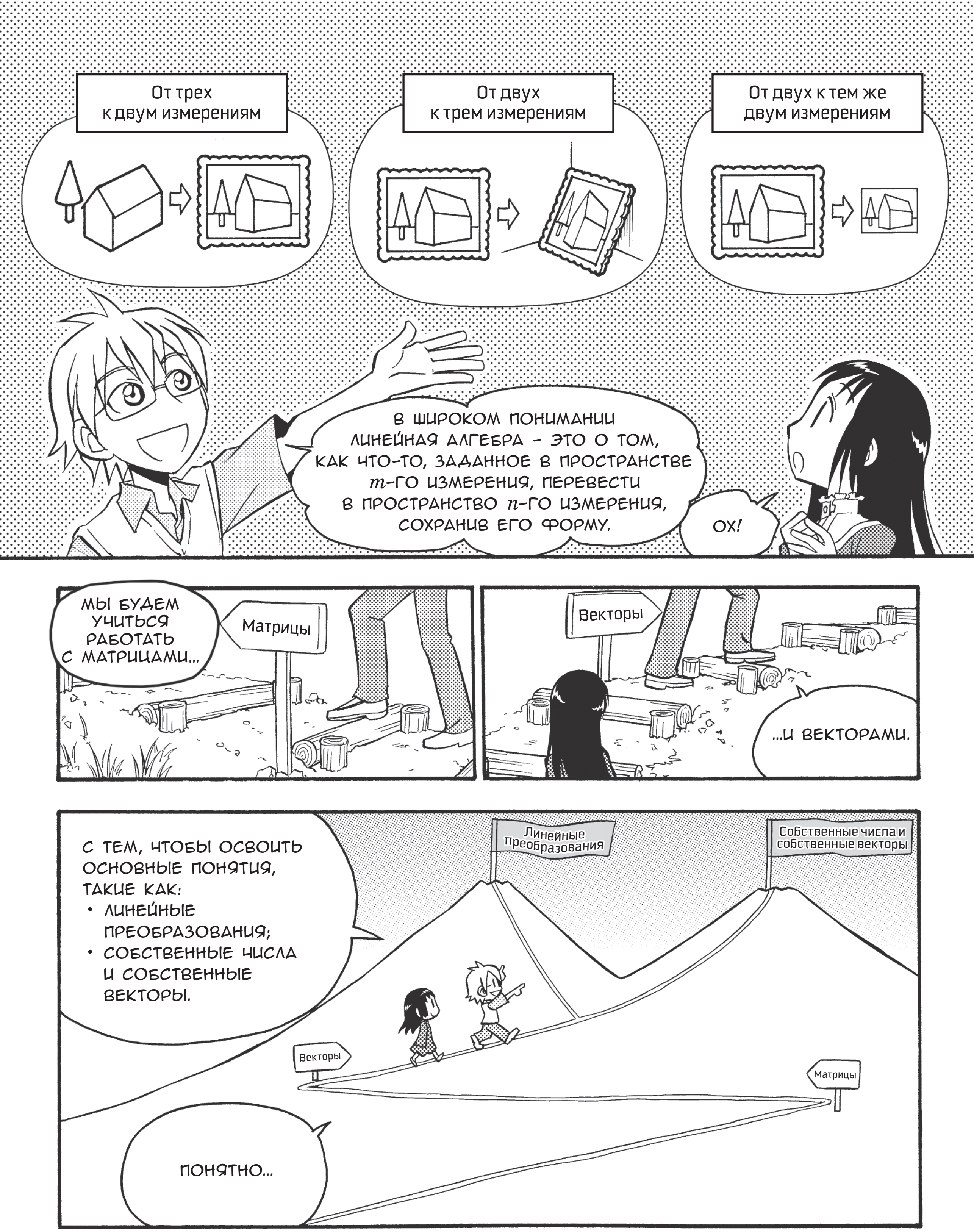

БУМ!
УФФ...
Интересно, какая она...
ОУ.
Она слегка похожа на Тэтсуо?..
МММ...
ПРОСТИ, ЭТО ТЫ - РЕЙХИ ЮУРИНО?
КАК?
ПРИЯТНО ПОЗНАКОМИТЬСЯ.
Я МИСА ИЧИНОСЕ.

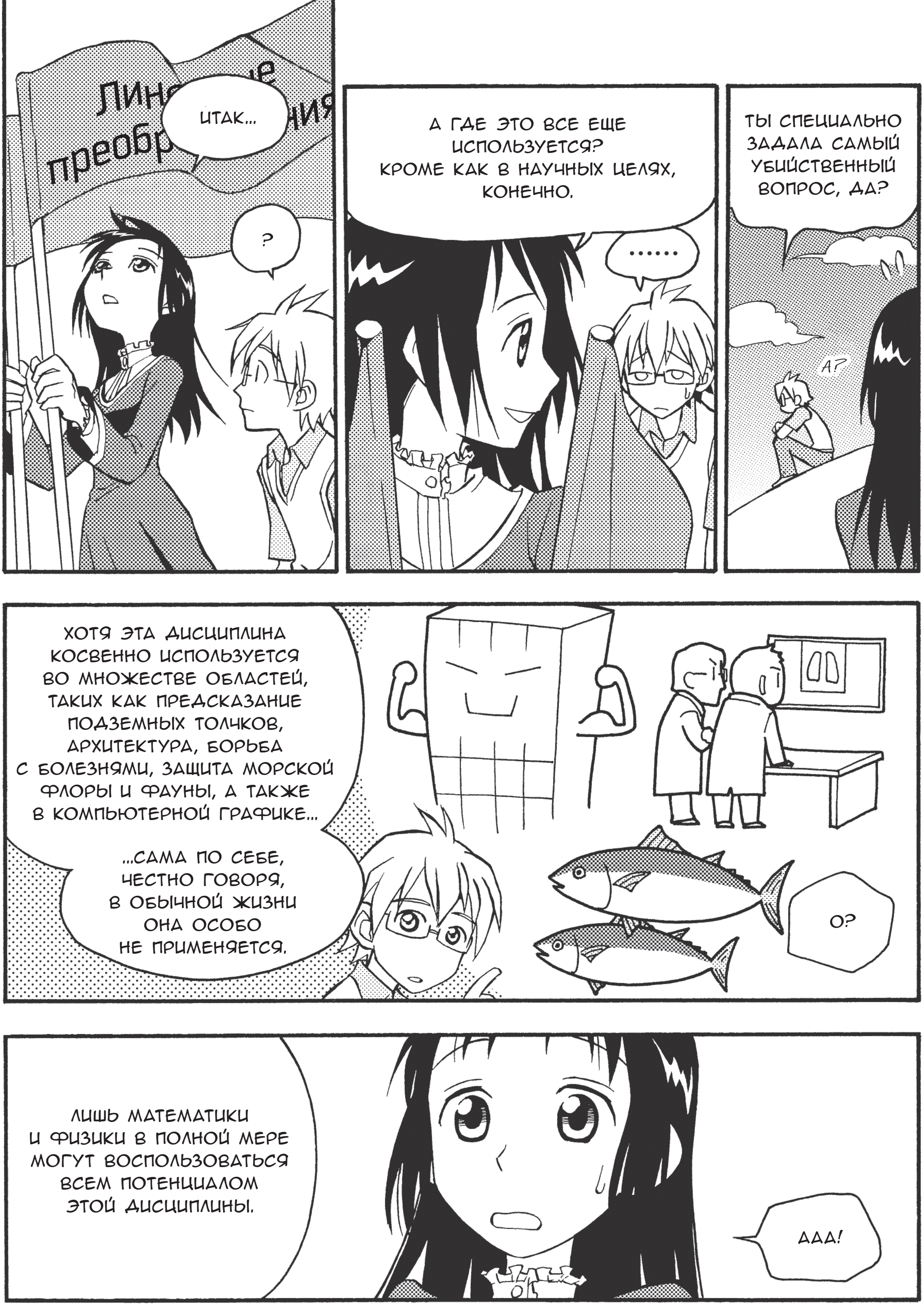

ИЗВИНИ... МОЙ БРАТ ПОПРОСИЛ ТЕБЯ... ВОТ ВСЕ ТАК НЕОЖИДАННО.
ВСЕ НОРМАЛЬНО! Я СОВСЕМ НЕ ПРОТИВ!
И КАК ЭТО... ТАКАЯ ДЕВУШКА МОЖЕТ БЫТЬ ЕГО СЕСТРОЙ?
НО...
А Я И НЕ ЗНАЛА, ЧТО УЧУСЬ ТАМ ЖЕ, ГДЕ И ЗНАМЕНИТЫЙ РЕЙХИ ЮУРИНО!
НУ, НЕ СКАЗАЛ БЫ, ЧТО Я ТАКОЙ УЖ ЗНАМЕНИТЫЙ...
Я ТАК ОБ ЭТОМ МЕЧТАЛА!
Э...ММ... МОЖНО ПОПРОСИТЬ ТЕБЯ ПОДПИСАТЬ КНИГУ?
ЭТО... АВТОГРАФ?
ЕСЛИ НЕ ХОЧЕШЬ - НЕ НАДО...
НЕТ, НЕТ... С УДОВОЛЬСТВИЕМ.
ПРИКОСНОВЕНИЕ
ГЛОТОК.

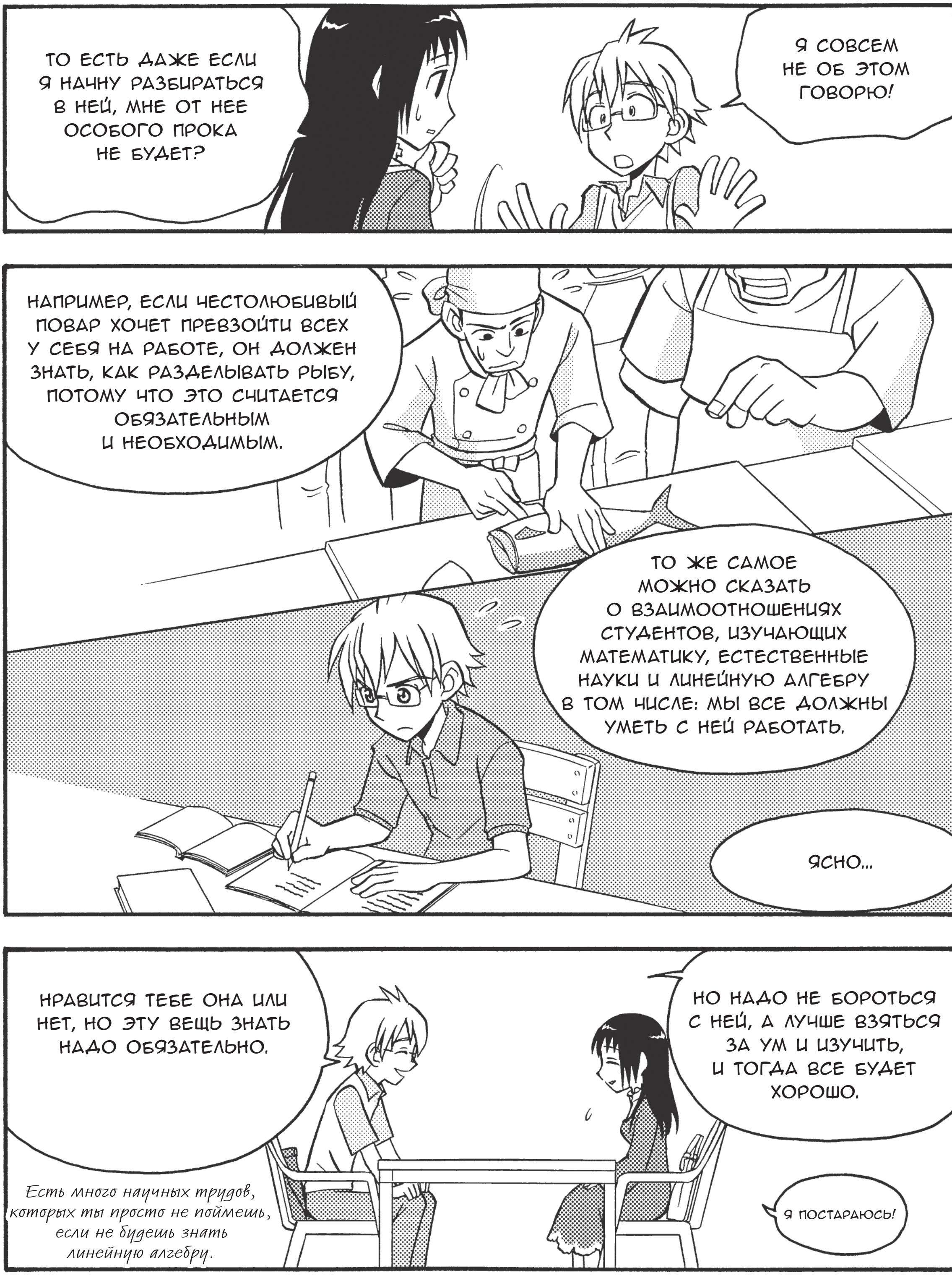

ИТАК...
....
ПРО...
...СТИ.
БУУУМ!
ИЗВИНИ, МИСА, НО Я, НАВЕРНОЕ, ПОЕДУ ДОМОЙ СЕГОДНЯ РАНЬШЕ.
О... БРАТЕЦ!
ЮУРИНООО!
ПОМНИШЬ НАШ УГОВОР?
АГА!

1.1. Краткий обзор курса линейной алгебры


НО ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕ ТАКИЕ УЖ СЛОЖНЫЕ, КАК КАЖЕТСЯ!
И, ЕСЛИ ПОНИМАЕШЬ ОСНОВЫ, САМИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НА САМОМ ДЕЛЕ ДОВОЛЬНО ПРОСТЫЕ.
ПРАВДА?
НЕ СКАЖУ, ЧТО ЭТО УРОВЕНЬ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ, НО НЕ НАМНОГО СЛОЖНЕЕ.
О! КАКОЕ СЧАСТЬЕ...
САМО СОБОЙ!
НО Я ТАК И НЕ ПОЙМУ, ЧТО ЖЕ ЭТО ТАКОЕ – ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА – НА САМОМ ДЕЛЕ?
ХММ...
ЭЭЭ...
СЛОЖНО ОТВЕТИТЬ НА ЭТОТ ВОПРОС КОНКРЕТНО.
ПОЧЕМУ?
НУ, ЭТО ДОВОЛЬНО АБСТРАКТНАЯ ВЕЩЬ. НО Я ПОСТАРАЮСЬ.


От трех к двум измерениям
От двух к трем измерениям
От двух к тем же двум измерениям
В широком понимании линейная алгебра – это о том, как что-то, заданное в пространстве m-го измерения, перевести в пространство n-го измерения, сохранив его форму.
Ох!
Мы будем учиться работать с матрицами...
Матрицы
Векторы
...и векторами.
С тем, чтобы освоить основные понятия, такие как:
• линейные преобразования;
• собственные числа и собственные векторы.
Линейные преобразования
Собственные числа и собственные векторы
Векторы
Матрицы
Понятно...


Лин… …е
преобр… …ния
Итак…
?
А где это все еще используется? Кроме как в научных целях, конечно.
....
Ты специально задала самый убийственный вопрос, да?
А?
Хотя эта дисциплина косвенно используется во множестве областей, таких как предсказание подземных толчков, архитектура, борьба с болезнями, защита морской флоры и фауны, а также в компьютерной графике…
…сама по себе, честно говоря, в обычной жизни она особо не применяется.
О?
Лишь математики и физики в полной мере могут воспользоваться всем потенциалом этой дисциплины.
Ааа!



ТО ЕСТЬ ДАЖЕ ЕСЛИ Я НАЧНУ РАЗБИРАТЬСЯ В НЕЙ, МНЕ ОТ НЕЕ ОСОБОГО ПРОКА НЕ БУДЕТ?
Я СОВСЕМ НЕ ОБ ЭТОМ ГОВОРЮ!
НАПРИМЕР, ЕСЛИ ЧЕСТОЛЮБИВЫЙ ПОВАР ХОЧЕТ ПРЕВЗОЙТИ ВСЕХ У СЕБЯ НА РАБОТЕ, ОН ДОЛЖЕН ЗНАТЬ, КАК РАЗДЕЛЫВАТЬ РЫБУ, ПОТОМУ ЧТО ЭТО СЧИТАЕТСЯ ОБЯЗАТЕЛЬНЫМ И НЕОБХОДИМЫМ.
ТО ЖЕ САМОЕ МОЖНО СКАЗАТЬ О ВЗАИМООТНОШЕНИЯХ СТУДЕНТОВ, ИЗУЧАЮЩИХ МАТЕМАТИКУ, ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ И ЛИНЕЙНУЮ АЛГЕБРУ В ТОМ ЧИСЛЕ: МЫ ВСЕ ДОЛЖНЫ УМЕТЬ С НЕЙ РАБОТАТЬ.
ЯСНО...
НРАВИТСЯ ТЕБЕ ОНА ИЛИ НЕТ, НО ЭТУ ВЕЩЬ ЗНАТЬ НАДО ОБЯЗАТЕЛЬНО.
НО НАДО НЕ БОРОТЬСЯ С НЕЙ, А ЛУЧШЕ ВЗЯТЬСЯ ЗА УМ И ИЗУЧИТЬ, И ТОГДА ВСЕ БУДЕТ ХОРОШО.
Есть много научных трудов, которых ты просто не поймешь, если не будешь знать линейную алгебру.
Я ПОСТАРАЮСЬ!


Что касается наших занятий...
По-моему, будет правильно, если мы будем рассматривать линейную алгебру как единое целое.
Линейные преобразования
Собственные числа и собственные векторы
Векторы
Матрицы
Большинство учебников и курсов по этому предмету подразумевают длинные вычисления и подробные доказательства.
А отсюда следует…
Я постараюсь по возможности избежать этого...
Фью-ють!
...и сосредоточиться на объяснении основ.
Отлично!


НЕ ХОЧУ ТЕБЯ ПЕРЕГРУЖАТЬ. МОЖЕТ, ХВАТИТ НА СЕГОДНЯ?
В СЛЕДУЮЩИЙ РАЗ НАЧНЕМ С ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОСНОВ.
ХОРОШО.
ДЗЫНЬ-ДЗЫНЬ
ОЙ, ЭТО МЕНЯ!
ДЗЫНЬ-ДЗЫНЬ
ОТ БРАТА.
О?
Сенсей шлет эсэмэски?!
С трудом представляю.
"БЫСТРО ДОМОЙ"!
НУ, Э... ПЕРЕДАВАЙ ЕМУ ПРИВЕТ!

1.2. ТЕМЫ, КОТОРЫЕ ВАЖНЫ ДЛЯ НАУКИ, И ТЕМЫ, КОТОРЫЕ ПОПАДАЮТСЯ НА ЭКЗАМЕНАХ

В таблице ниже приведены темы, которые могут попасться в экзаменах по линейной алгебре.

	Где найти
Нахождение обратной матрицы методом Гаусса	Глава 4
Нахождение значения определителя	Глава 4
Решение системы линейных уравнений методом Крамера	Глава 4
Нахождение собственного вектора и собственного числа	Глава 8

Если прорешать множество таких задач в учебниках, то и на экзамене удастся с ними справиться. Но даже если вы эксперт в этой теме, то не факт, что вам понятны линейные преобразования – главная задача линейной алгебры. Дело в том, что на экзаменах по линейной алгебре спрашивают совершенно другие темы.

В жизни можно:

1) получить хорошие оценки на экзамене по линейной алгебре и понимать линейные преобразования;
2) получить хорошие оценки на экзамене по линейной алгебре, но не понимать линейные преобразования;
3) провалиться на экзамене по линейной алгебре, но понимать линейные преобразвания;
4) провалиться на экзамене по линейной алгебре и не понимать линейные преобразования.

Таковы четыре возможных варианта. Если мыслить здраво, с учетом необходимости для работы и дальнейшей учебы, варианты 1 и 2 принесут для студента больше всего пользы. Я согласен, конечно, что вариант 1 лучше всего. Но с вариантом 2 я согласиться не могу. Ведь это все равно, что не видеть леса за деревьями. Иными словами, в этом случае сразу после выпуска от знаний по линейной алгебре в голове останется только то, что это какая-то непонятно зачем нужная чушь. Жизнь длинная. И я полагаю, что вариант 3 сделает дальнейшую жизнь человека более счастливым, чем вариант 2.

1.3. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МАТЕМАТИКОВ

Прошу вас прочитать эту главу. А после прочтения сразу же выкинуть ее из головы. Если вы этого не сделаете, то дальнейшее понимание манги будет затруднено. Многие читатели подумают, а не пропустить ли вообще эту главу? Но как автор я бы хотел, чтобы вы ее прочитали.

1.3.1. Линейное пространство, как его видят математики

Ниже будет сказано, что линейная алгебра – это мостик из n-мерного в m-мерный мир. В принципе, в этой книжке и далее проблем с этим не будет. Однако математики считают иначе. С их точки зрения, линейная алгебра – это наука, которая занимается линейным пространством, как показано в рамочке на следующей странице. Векторы, о которых идет речь на следующей странице, значительно отличаются от векторов:

- в курсе школьной математики[1];
- о которых идет речь в главе 4 «Векторы» и других частях этой книги, поскольку это более абстрактные и высокоуровневые понятия.

Хотя бы кто-нибудь из читателей может понять, о чем идет речь на следующей странице?

Если нет, то вздохните с облегчением. Это нормально – не понимать, да и смысла не имеет, если только вы не математик. Однако иметь представление о том, что в бейсболе есть бейсбольное поле, в гольфе – поле для гольфа, а в линейной алгебре – линейное пространство, не так уж и бесполезно.

Но раз уж нам представилась возможность, то приведем пример линейного пространства. Так, например, «множество многочленов n-й степени с действительными коэффициентами» вроде $7t^4 - 3t - 4$ и $2t - 1$ удовлетворяет аксиоме действительного векторного пространства. Это означает, что:

- «множество многочленов n-й степени с действительными коэффициентами» – это действительное векторное пространство;
- множество многочленов n-й степени $7t^4 - 3t - 4$ и $2t - 1$ представляет собой векторы.

[1] Для читателей примерно того же возраста, что и автор, речь идет об алгебре и геометрии.

■ Линейное пространство

Пусть x_i, x_j и x_k – произвольные элементы множества X. Пусть c и d – произвольные числа.

В случае если множество X удовлетворяет следующим двум условиям: «множество X является линейным пространством» или «множество X является векторным пространством».

Условие 1

Определим для x_i и x_j элемент $x_i + x_j$, называемый **суммой**. Сумма удовлетворяет следующим условиям:

1) $(x_i + x_j) + x_k = x_i + (x_j + x_k)$;
2) $x_i + x_j = x_j + x_i$;
3) существует 0, который называется **нулевым вектором**, равным $x_i + 0 = 0 + x_i = x_i$;
4) для x_i существует $(-x_i)$, который называется **обратным вектором** и для которого $x_i + (-x_i) = (-x_i) + x_i = 0$.

Условие 2

Для x_i и c есть элемент cx_i, называемый **скалярным произведением**. Скалярное произведение должно удовлеторять следующим условиям:

5) $c(x_i + x_j) = cx_i + cx_j$;
6) $(cd)x_i = c(dx_i)$;
7) $(c + d)x_i = cx_i + dx_i$;
8) $1x_i = x_i$.

Линейное пространство, в котором c и d – действительные числа, называется **действительным линейным пространством**, или **действительным векторным пространством**.

Линейное пространство, в котором c и d – комплексные числа, называется **комплексным линейным пространством**, или **комплексным векторным пространством**.

Условия 1–8 вместе называются **аксиомами линейного пространства**, или **аксиомами векторного пространства**. Элемент линейного пространства называется **вектором**, а константа c – **скаляром**.

1.3.2. Линейная алгебра и аксиомы

По некоторым причинам линейная алгебра, которую представляют себе математики, либо туманна, либо абстрактна.

Математики прошлого вывели так называемые аксиомы:

- часть больше целого;
- в плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной, на основании **суждений, которые кажутся самоочевидными.**

Однако с течением времени появились вопросы:

- всегда ли целое больше, чем часть?
- правда ли, что в плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной?

Поэтому математики стали оспаривать аксиомы.

Но если вы сомневаетесь в основных аксиомах, значит, и доказать вы ничего не можете. Как правило, это приводит к отказу от результатов своих и чужих исследований, которые базировались на этих аксиомах. В результате математики вывели аксиомы из разряда «само собой очевидных суждений» до «примем к сведению следующие гипотезы». Да и если дальнейшие рассуждения не противоречат этим гипотезам, то все с ними хорошо.

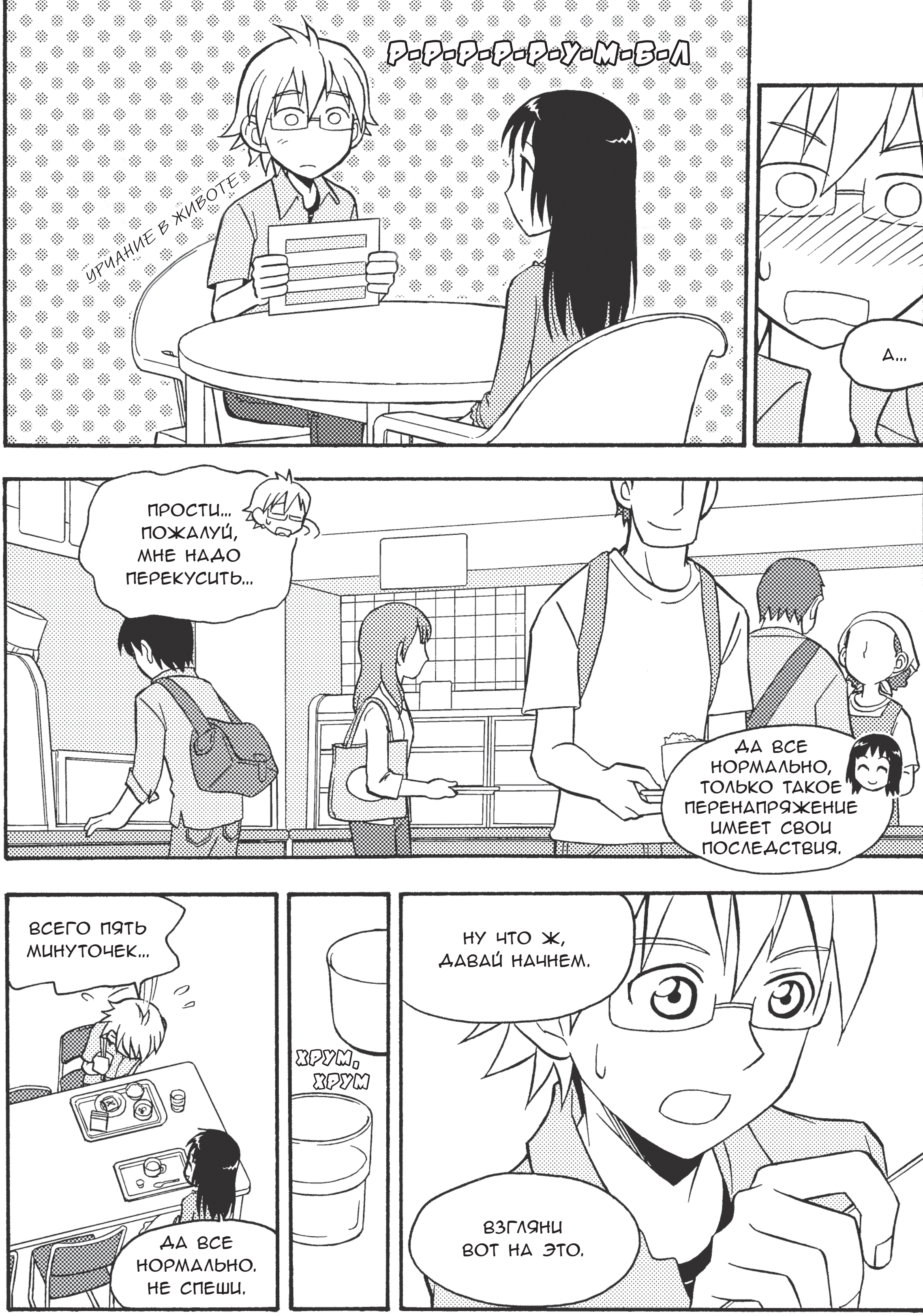
После того как смысл аксиом был пересмотрен, мир математики стал шире. Но вместе с тем он стал более абстрактным, оторванным от реальности.

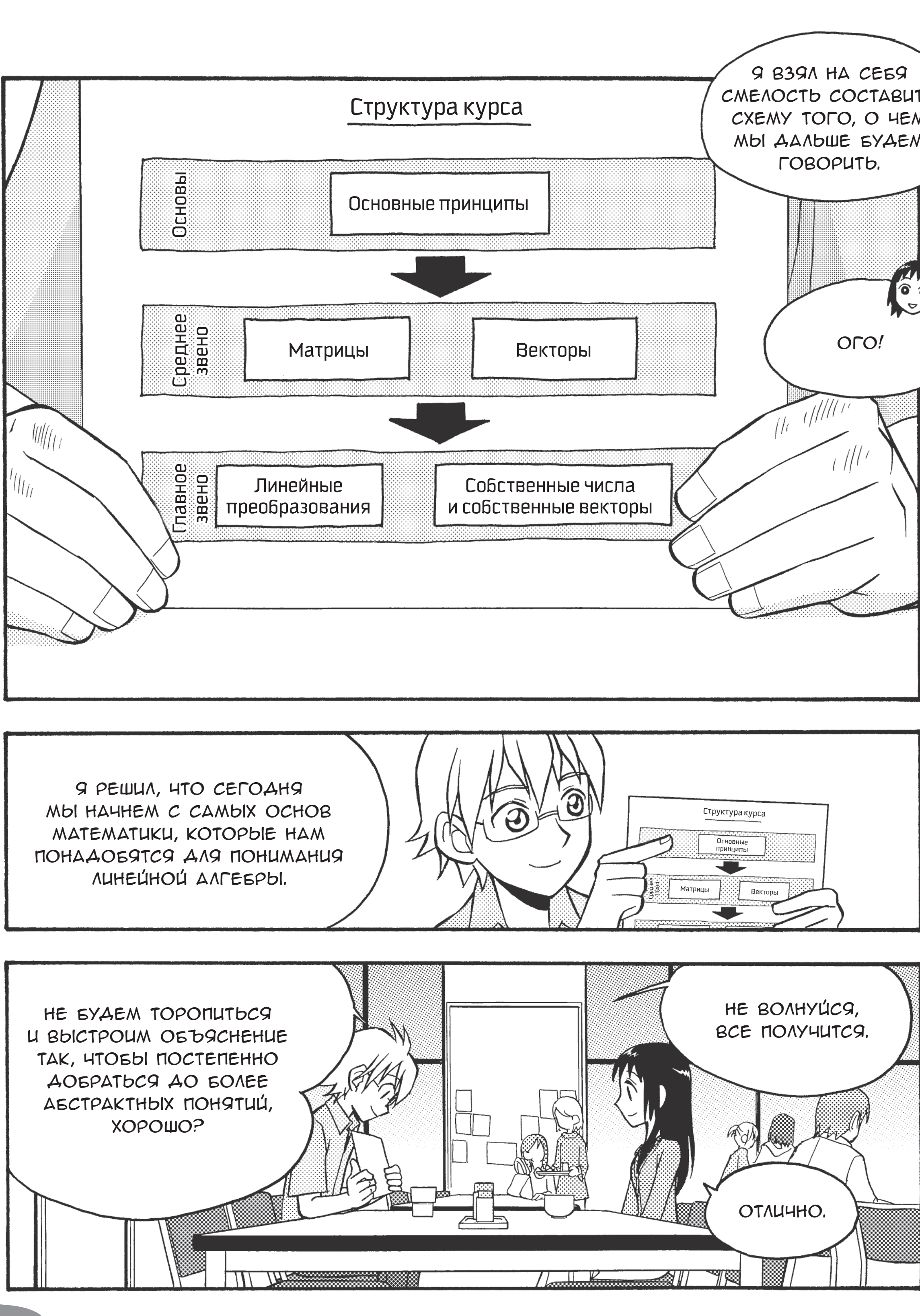
Да, после этого пересмотра линейная алгебра стала трендом.

Глава 2

Основные принципы


79
80
81
Основы надо знать!
УГГХХХ
Бух!
Го… готово!
100…
Разменчался! После отжиманий ногами надо заняться! Приседания! Давай, давай!
Привет… думаю, начнем сегодня с…
Рейхи, ты сегодня какой-то не такой.
Все нормально?
Все нормально. Посмотри на…


Р-Р-Р-Р-Р-У-М-Б-Л
УРЧАНИЕ В ЖИВОТЕ
А...
ПРОСТИ... ПОЖАЛУЙ, МНЕ НАДО ПЕРЕКУСИТЬ...
ДА ВСЕ НОРМАЛЬНО, ТОЛЬКО ТАКОЕ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЕ ИМЕЕТ СВОИ ПОСЛЕДСТВИЯ.
ВСЕГО ПЯТЬ МИНУТОЧЕК...
ДА ВСЕ НОРМАЛЬНО. НЕ СПЕШИ.
ХРУМ, ХРУМ
НУ ЧТО Ж, ДАВАЙ НАЧНЕМ.
ВЗГЛЯНИ ВОТ НА ЭТО.


Структура курса
Основы
Основные принципы
Среднее звено
Матрицы
Векторы
Главное звено
Линейные преобразования
Собственные числа и собственные векторы
Я взял на себя смелость составить схему того, о чем мы дальше будем говорить.
Ого!
Я решил, что сегодня мы начнем с самых основ математики, которые нам понадобятся для понимания линейной алгебры.
Не будем торопиться и выстроим объяснение так, чтобы постепенно добраться до более абстрактных понятий, хорошо?
Не волнуйся, все получится.
Отлично.

2.1. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ ЧИСЕЛ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

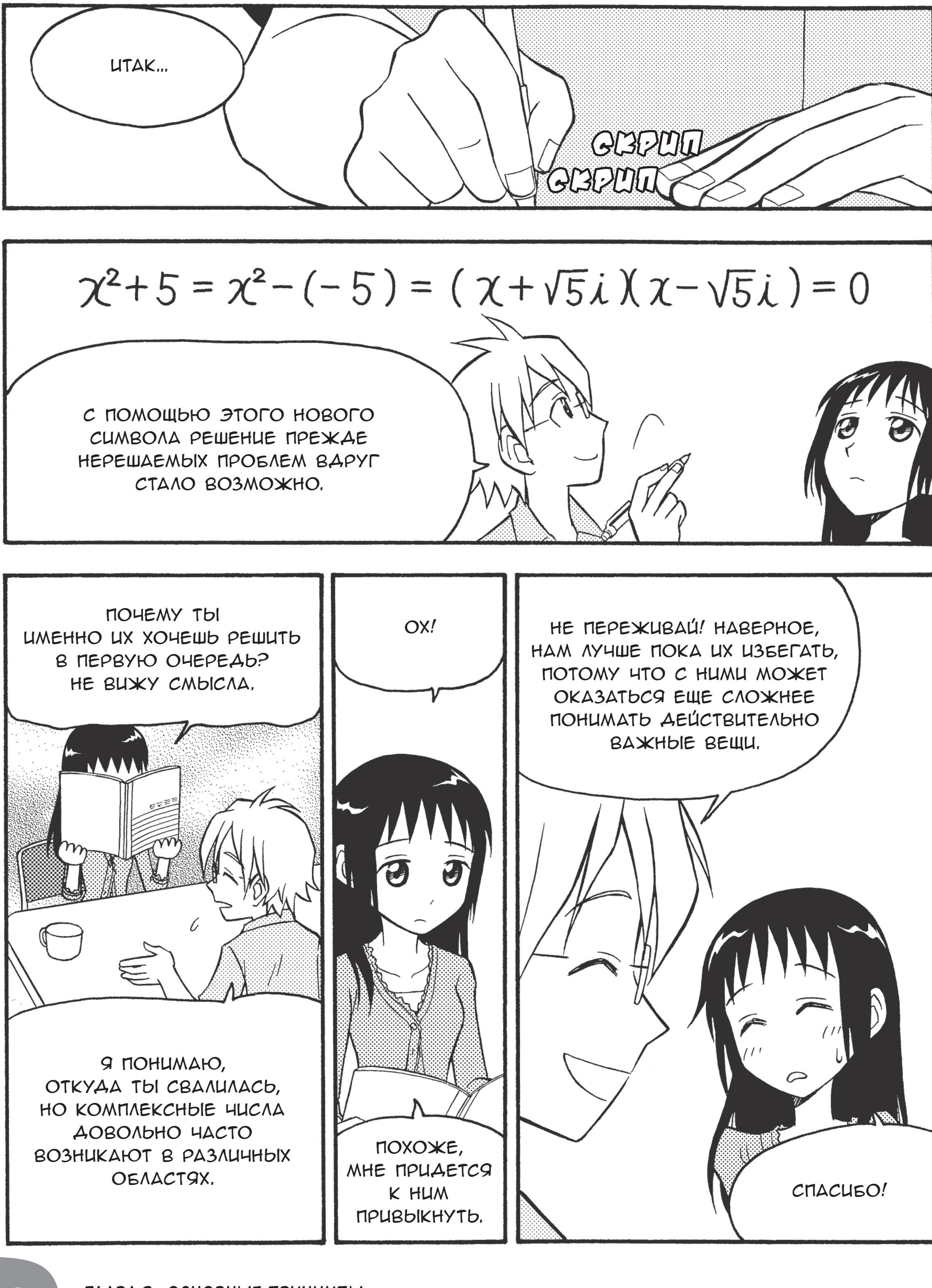
Комплексные числа записывают в таком виде:

$$a + b \cdot i,$$

где a и b – это вещественные числа, а i – это *мнимая единица*, заданная как $i = \sqrt{-1}$.

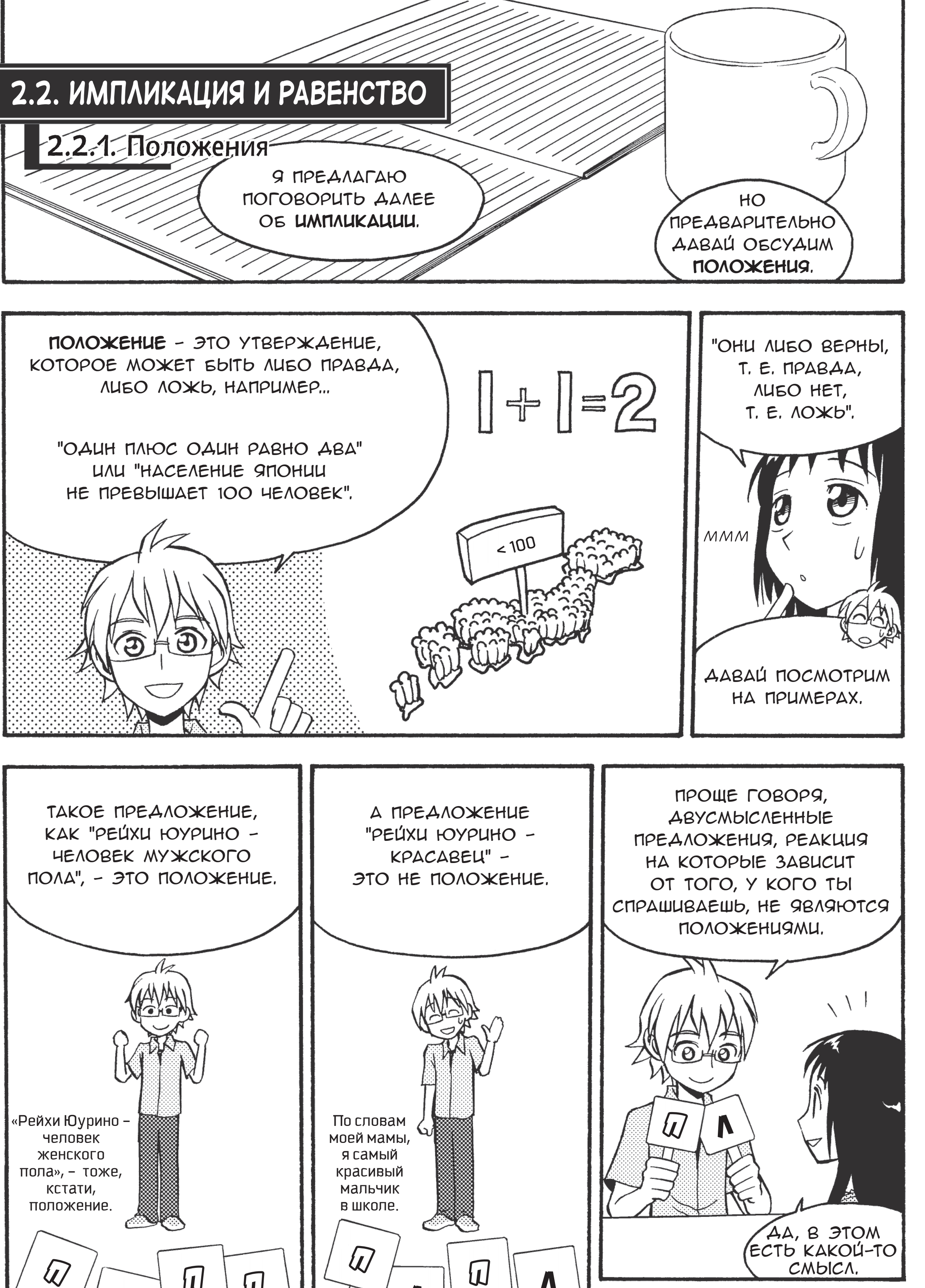
Вещественные числа			Мнимые числа
Целые числа • положительные натуральные числа; • отрицательные натуральные числа	*Рациональные числа* (не целые)* • конечная десятичная дробь, например 0,3; • бесконечная десятичная дробь, например 0,333...	*Иррациональные числа* • Такие числа, как π и $\sqrt{2}$, которые не могут быть выражены в виде конечного отношения двух целых чисел и повторяются бесконечно	• Комплексные числа без вещественной составляющей, например $0 + bi$, где b – это ненулевое вещественное число

* Числа, которые можно представить в виде q/p (где q и p – целые числа и p не равно 0), называются **рациональными числами.** Целые числа – это особый случай рациональных чисел.

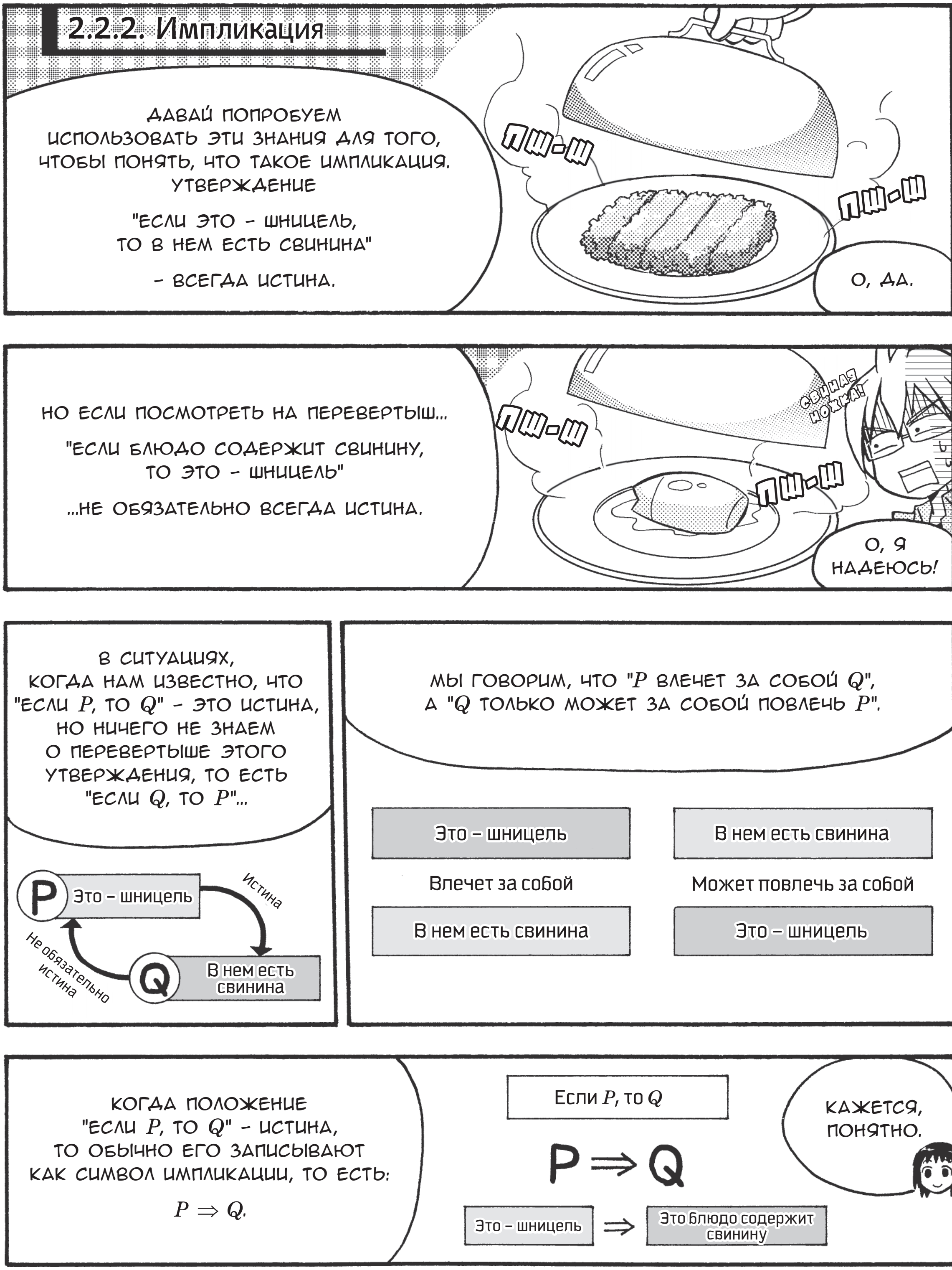

Итак...
СКРИП
СКРИП
$x^2+5 = x^2-(-5) = (x+\sqrt{5}i)(x-\sqrt{5}i) = 0$
С помощью этого нового символа решение прежде нерешаемых проблем вдруг стало возможно.
Почему ты именно их хочешь решить в первую очередь? Не вижу смысла.
Я понимаю, откуда ты свалилась, но комплексные числа довольно часто возникают в различных областях.
Ох!
Похоже, мне придется к ним привыкнуть.
Не переживай! Наверное, нам лучше пока их избегать, потому что с ними может оказаться еще сложнее понимать действительно важные вещи.
Спасибо!

2.2. ИМПЛИКАЦИЯ И РАВЕНСТВО

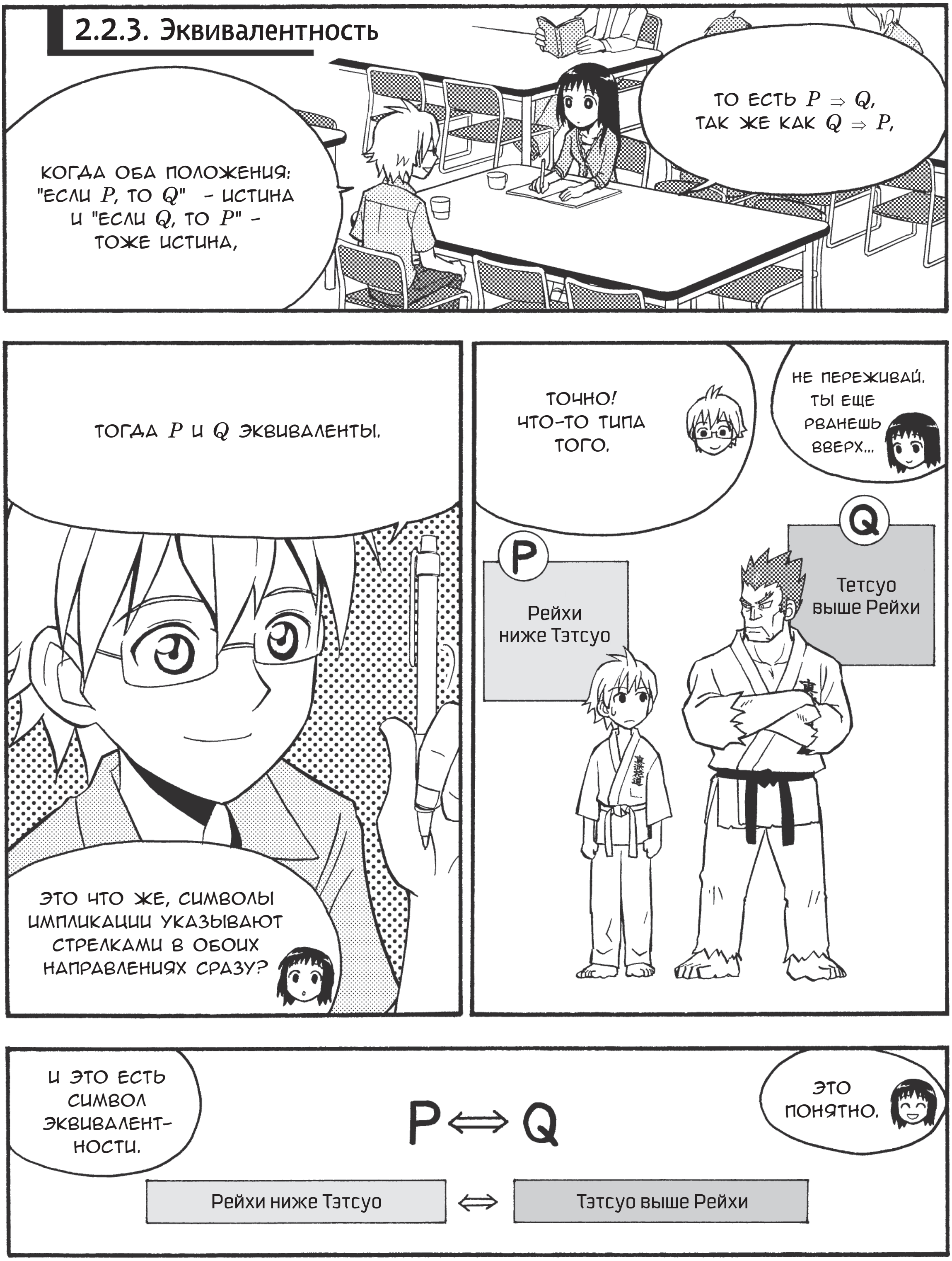
2.2.1. Положения



«П» означает «Правда».
«Л» означает «Ложь».

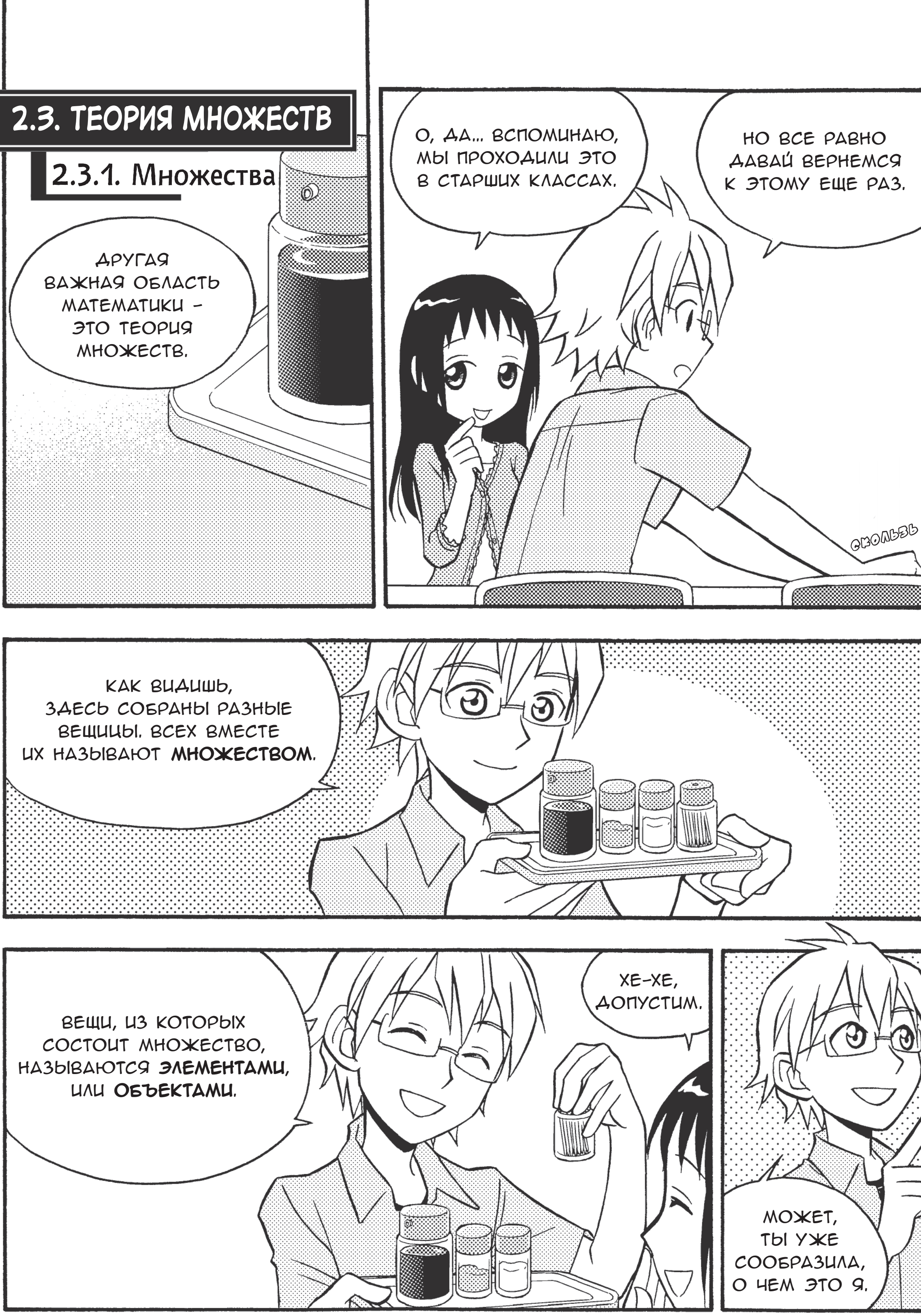

2.2.2. Импликация
Давай попробуем использовать эти знания для того, чтобы понять, что такое импликация. Утверждение "если это – шницель, то в нем есть свинина" – всегда истина.
ПШ-Ш
ПШ-Ш
О, да.
Но если посмотреть на перевертыш... "Если блюдо содержит свинину, то это – шницель" ...не обязательно всегда истина.
ПШ-Ш
Свиная ножка!
ПШ-Ш
О, я надеюсь!
В ситуациях, когда нам известно, что "если P, то Q" – это истина, но ничего не знаем о перевертыше этого утверждения, то есть "если Q, то P"...
P Это – шницель
Истина
Q В нем есть свинина
Не обязательно истина
мы говорим, что "P влечет за собой Q", а "Q только может за собой повлечь P".
Это – шницель
Влечет за собой
В нем есть свинина
В нем есть свинина
Может повлечь за собой
Это – шницель
Когда положение "если P, то Q" – истина, то обычно его записывают как символ импликации, то есть: $P \Rightarrow Q$.
Если P, то Q
$P \Rightarrow Q$
Это – шницель $\Rightarrow$ Это блюдо содержит свинину
Кажется, понятно.

2.2.3. Эквивалентность



2.3. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

2.3.1. Множества



Пример 1

Множество "Сикоку" – самый маленький из четырех основных японских островов – состоит из этих четырех элементов:

- Кагава-кен[1];
- Эхимэ-кен;
- Коти-кен;
- Токусима-кен.

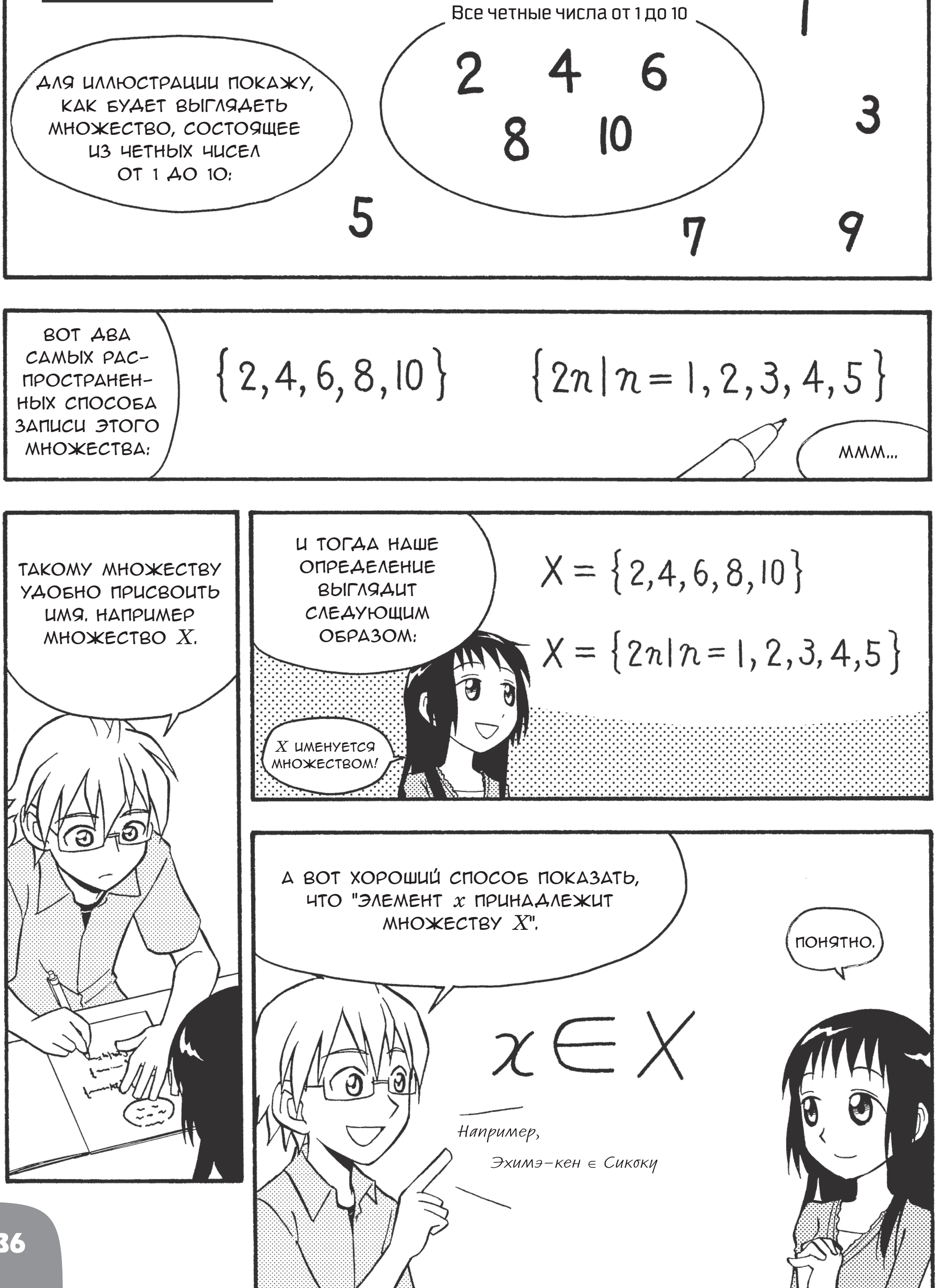
Пример 2

Множество, состоящее из четных целых чисел от 1 до 10, содержит следующие пять элементов:

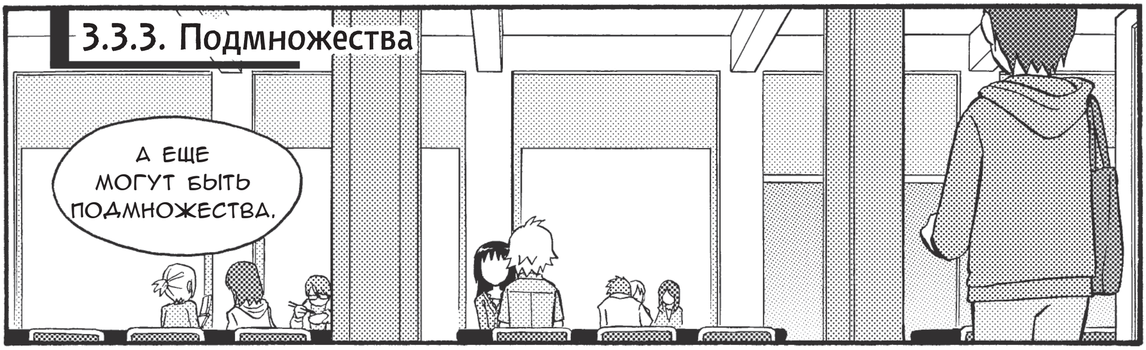
- 2;
- 4;
- 6;
- 8;
- 10.

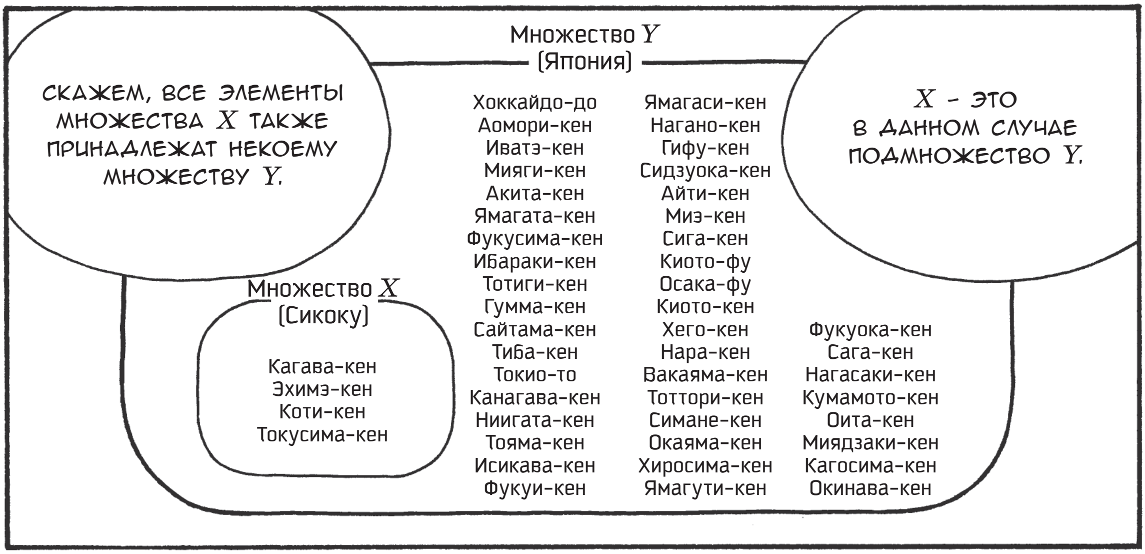
[1] Вся Япония разделена на префектуры. Слово «кен» означает префектуру.

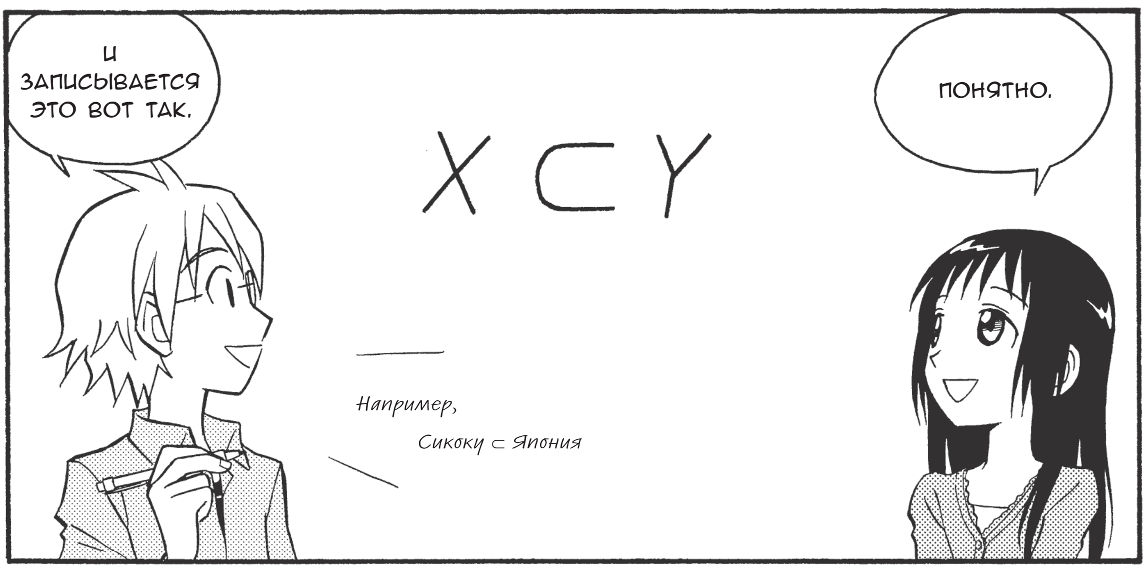
2.3.2. Символы множеств



3.3.3. Подмножества





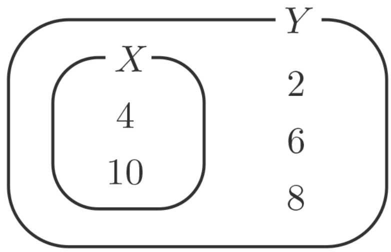


Пример 1

Предположим, у нас есть два множества X и Y:

$$X = \{4, 10\}$$

$$Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$



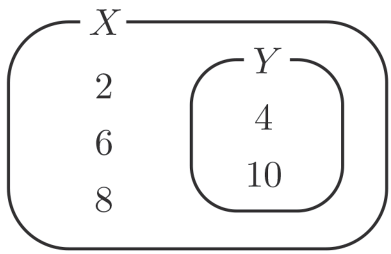
X – это подмножество Y, так как все элементы в X принадлежат также и Y.

Пример 2

Предположим, мы переставили множества:

$$X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$Y = \{4, 10\}$$



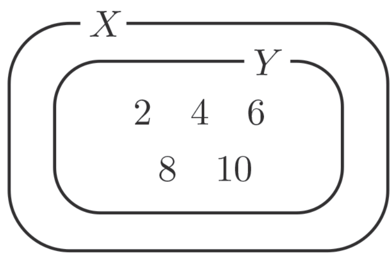
Так как не все элементы X принадлежат Y, то X больше не является подмножеством Y.

Пример 3

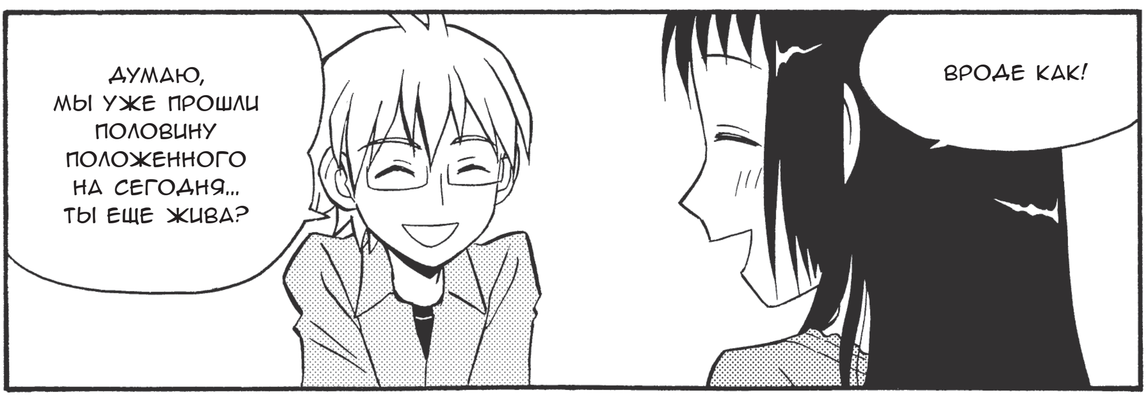
Предположим, у нас два одинаковых множества:

$$X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

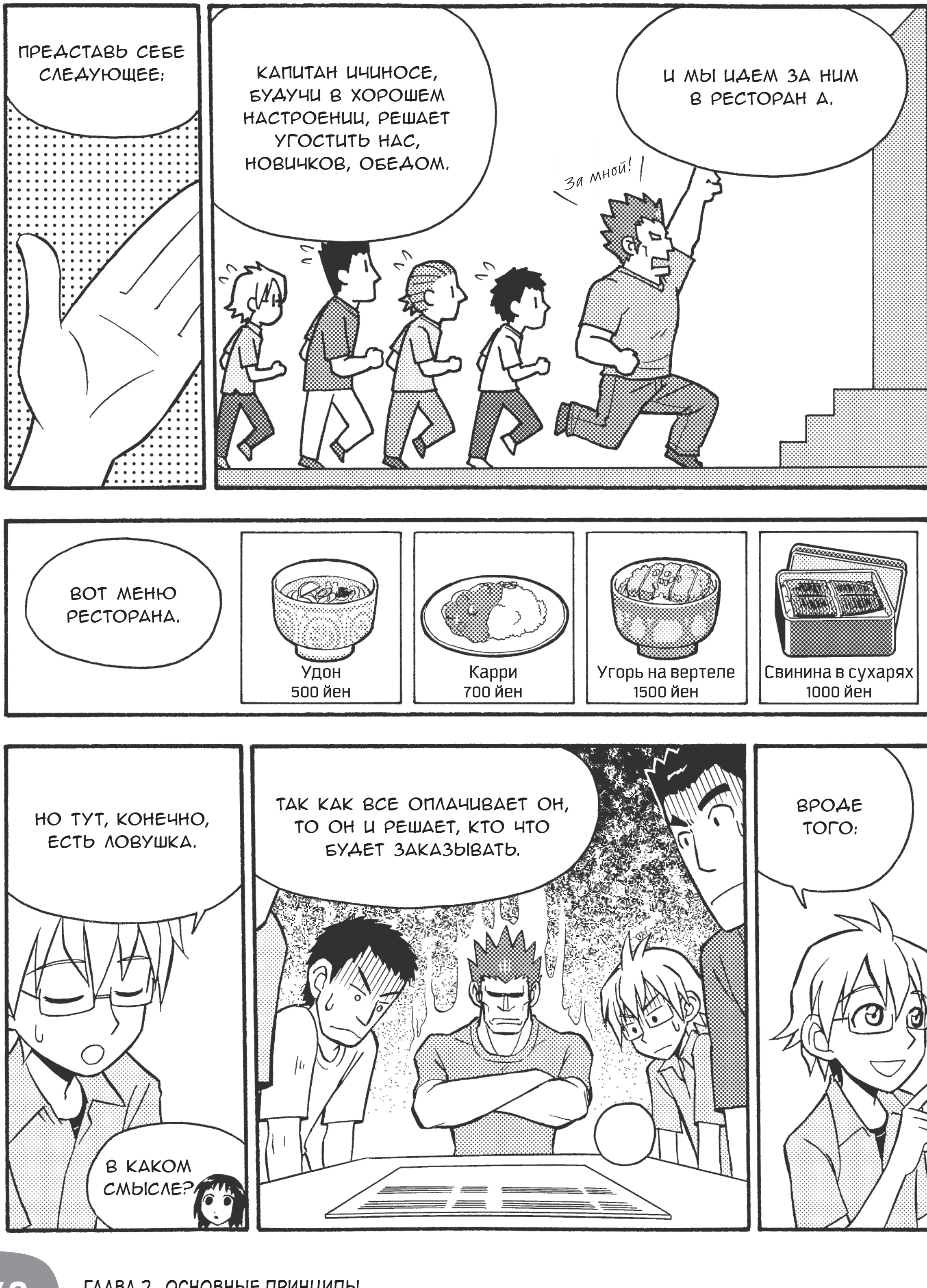


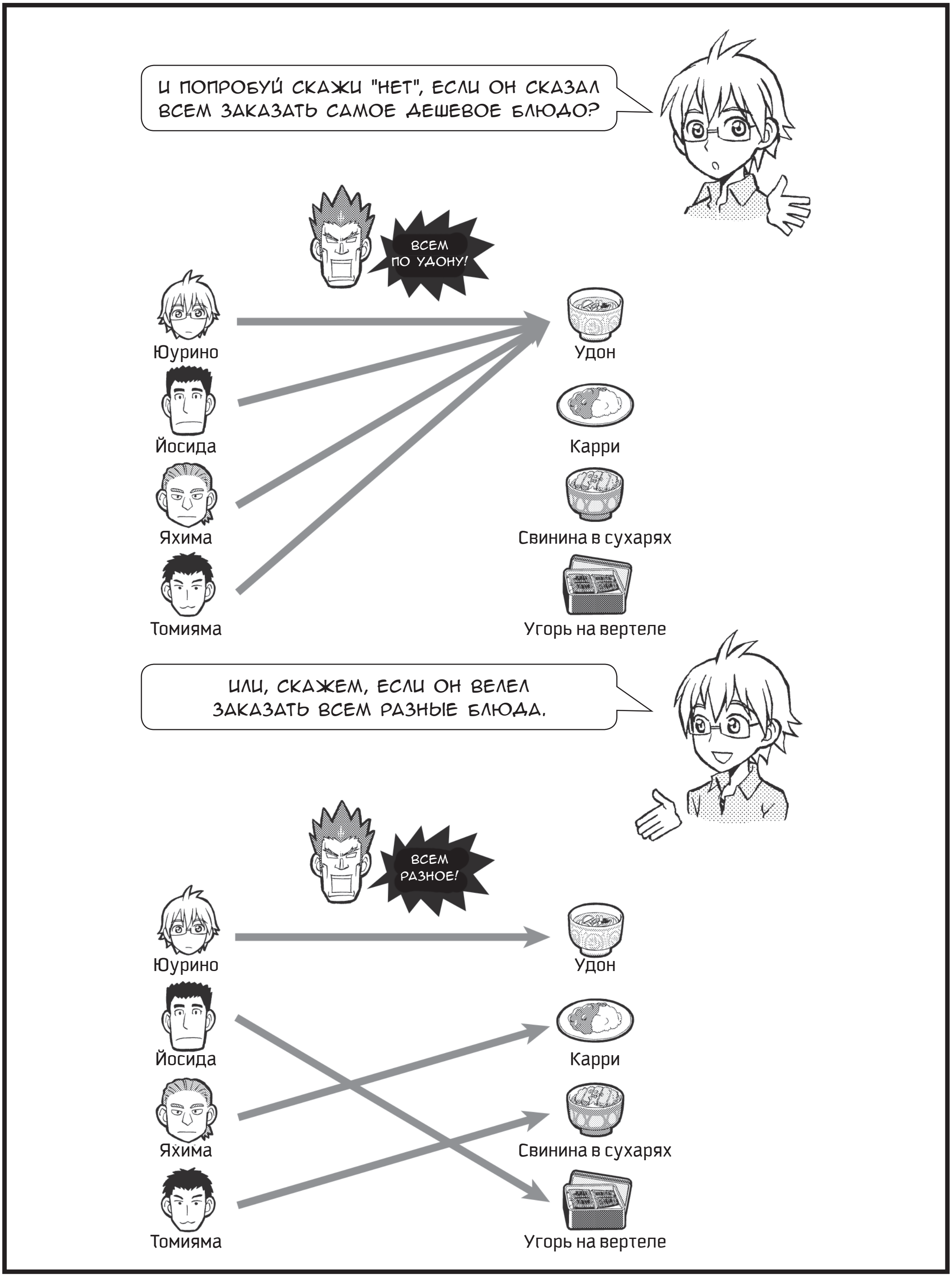
В таком случае оба множества являются подмножествами друг друга. Так, X – это подмножество Y, а Y – это подмножество X.

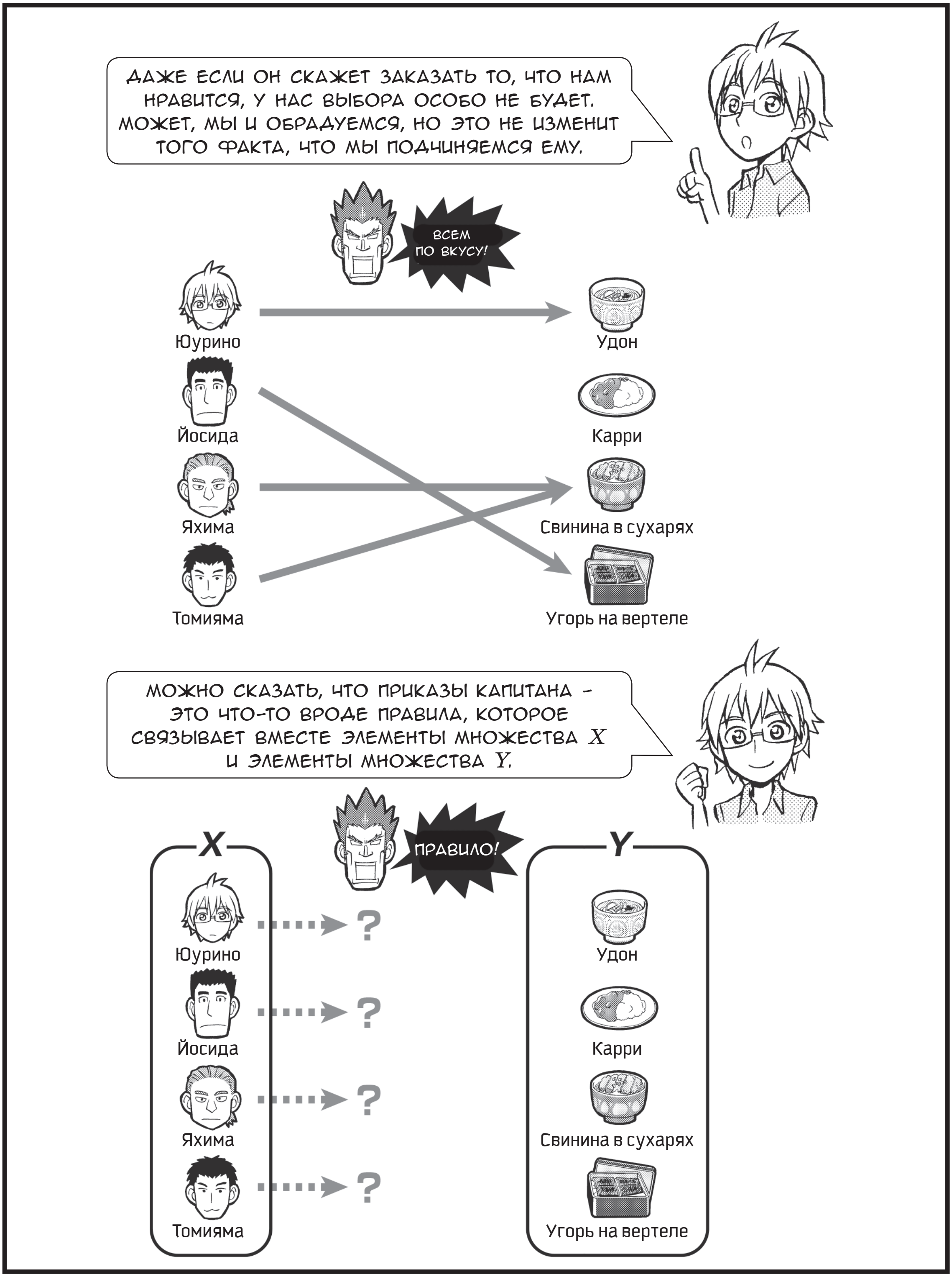


2.4. ФУНКЦИИ

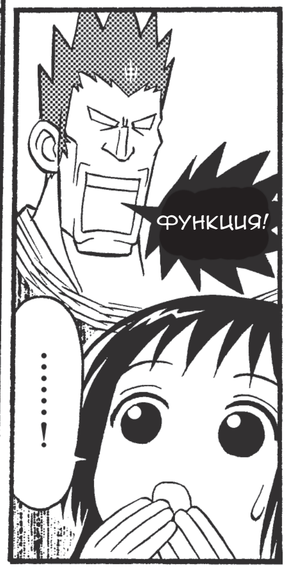
2.4.1. Обозначение функций

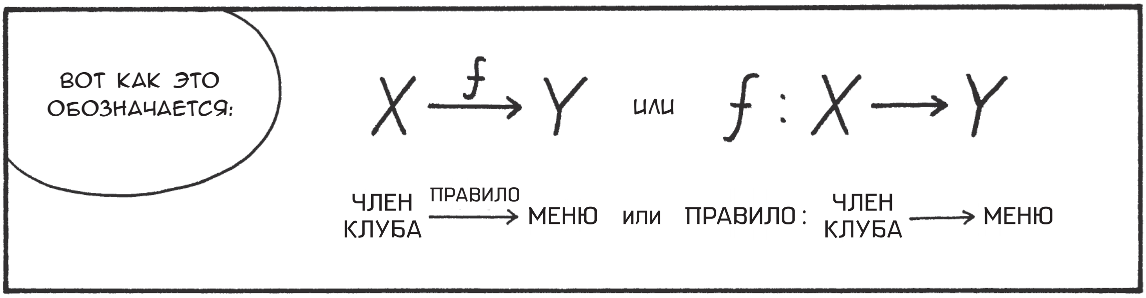

Представь себе следующее:
Капитан Ичиносе, будучи в хорошем настроении, решает угостить нас, новичков, обедом.
И мы идем за ним в ресторан А.
За мной!
Вот меню ресторана.
Удон
500 йен
Карри
700 йен
Угорь на вертеле
1500 йен
Свинина в сухарях
1000 йен
Но тут, конечно, есть ловушка.
В каком смысле?
Так как все оплачивает он, то он и решает, кто что будет заказывать.
Вроде того:


И ПОПРОБУЙ СКАЖИ "НЕТ", ЕСЛИ ОН СКАЗАЛ ВСЕМ ЗАКАЗАТЬ САМОЕ ДЕШЕВОЕ БЛЮДО?
ВСЕМ ПО УДОНУ!
Юурино
Йосида
Яхима
Томияма
Удон
Карри
Свинина в сухарях
Угорь на вертеле
ИЛИ, СКАЖЕМ, ЕСЛИ ОН ВЕЛЕЛ ЗАКАЗАТЬ ВСЕМ РАЗНЫЕ БЛЮДА.
ВСЕМ РАЗНОЕ!
Юурино
Йосида
Яхима
Томияма
Удон
Карри
Свинина в сухарях
Угорь на вертеле



ДАЖЕ ЕСЛИ ОН СКАЖЕТ ЗАКАЗАТЬ ТО, ЧТО НАМ НРАВИТСЯ, У НАС ВЫБОРА ОСОБО НЕ БУДЕТ. МОЖЕТ, МЫ И ОБРАДУЕМСЯ, НО ЭТО НЕ ИЗМЕНИТ ТОГО ФАКТА, ЧТО МЫ ПОДЧИНЯЕМСЯ ЕМУ.
ВСЕМ ПО ВКУСУ!
Юурино
Удон
Йосида
Карри
Яхима
Свинина в сухарях
Томияма
Угорь на вертеле
МОЖНО СКАЗАТЬ, ЧТО ПРИКАЗЫ КАПИТАНА – ЭТО ЧТО-ТО ВРОДЕ ПРАВИЛА, КОТОРОЕ СВЯЗЫВАЕТ ВМЕСТЕ ЭЛЕМЕНТЫ МНОЖЕСТВА X И ЭЛЕМЕНТЫ МНОЖЕСТВА Y.
ПРАВИЛО!
X
Y
Юурино ?
Йосида ?
Яхима ?
Томияма ?
Удон
Карри
Свинина в сухарях
Угорь на вертеле

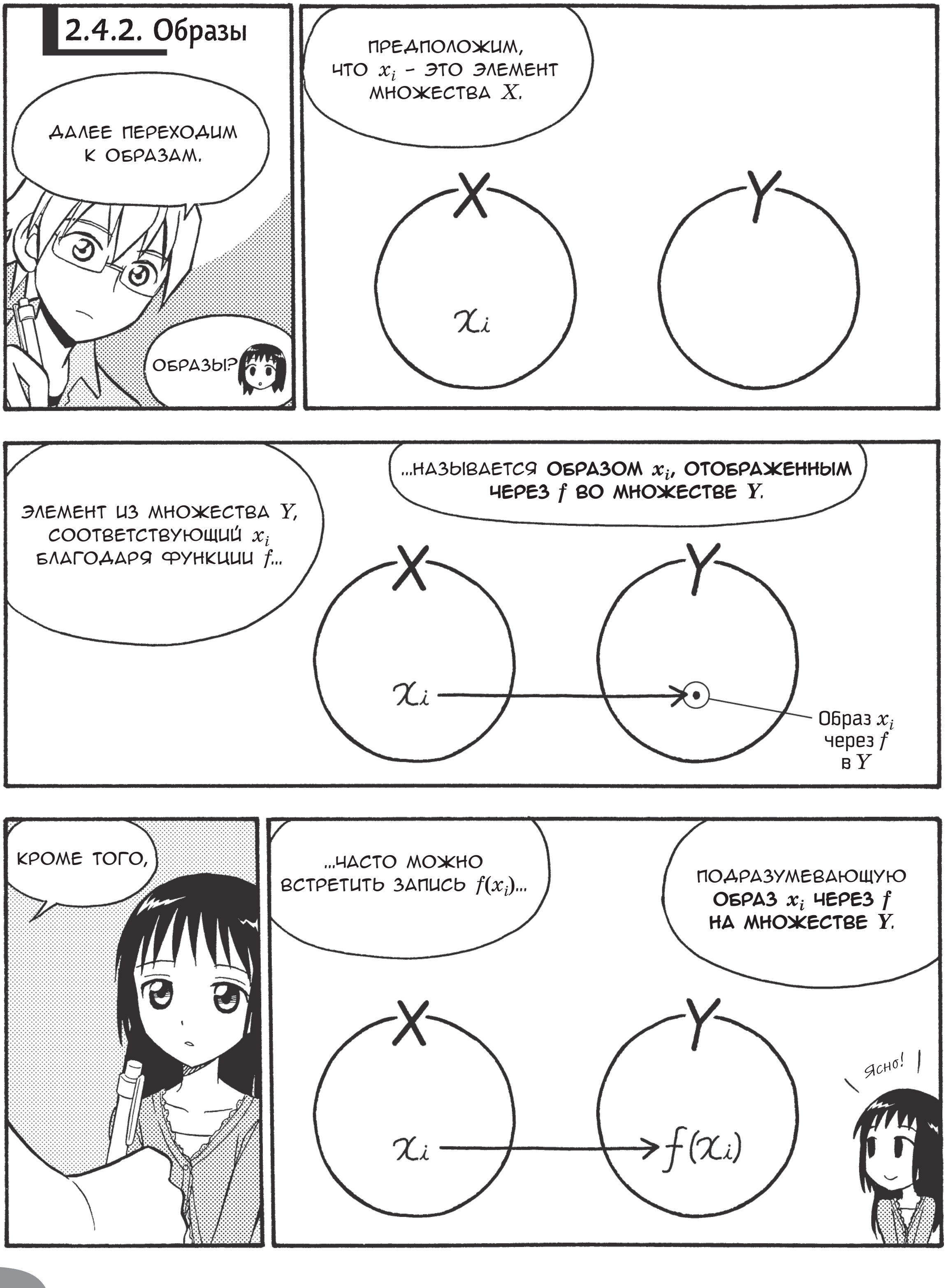




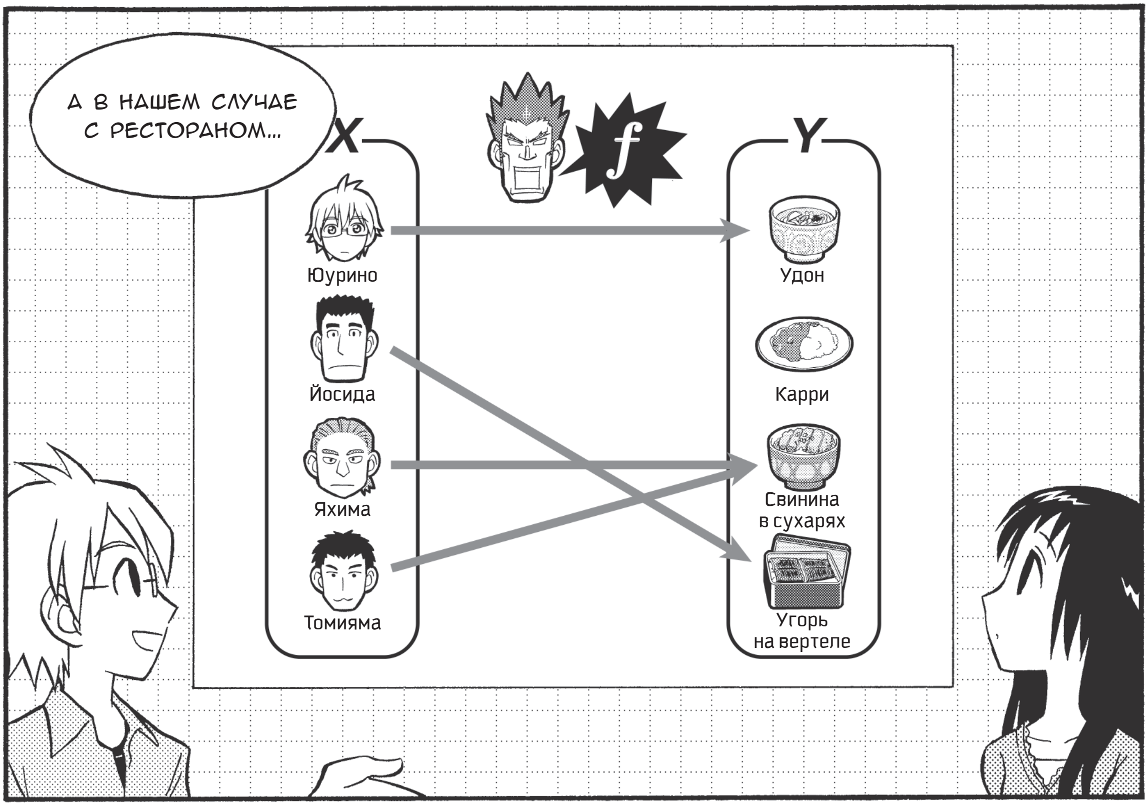
Функции

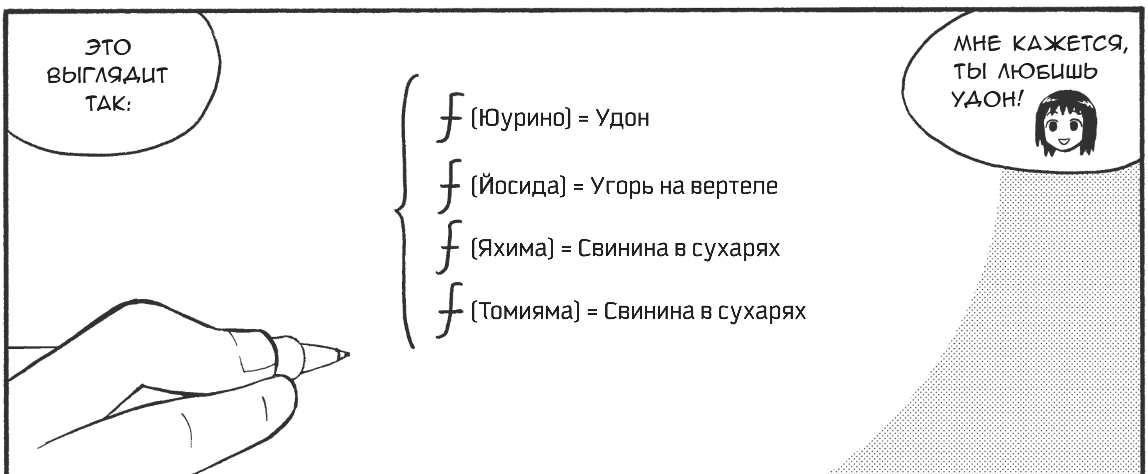
Правило, по которому элементы множества X связаны с элементами множества Y, называется **функцией X от Y"**. X обычно называется **областью определений**, или **доменом**, а Y – **областью значений**, или **кодоменом**.

2.4.2. Образы



Далее переходим к образам.
Образы?
Предположим, что x_i – это элемент множества X.
X
Y
x_i
Элемент из множества Y, соответствующий x_i благодаря функции f...
...называется **образом x_i, отображенным через f во множестве Y**.
X
Y
x_i
Образ x_i через f в Y
Кроме того,
...часто можно встретить запись $f(x_i)$...
подразумевающую **образ x_i через f на множестве Y**.
X
Y
x_i
$f(x_i)$
Ясно!

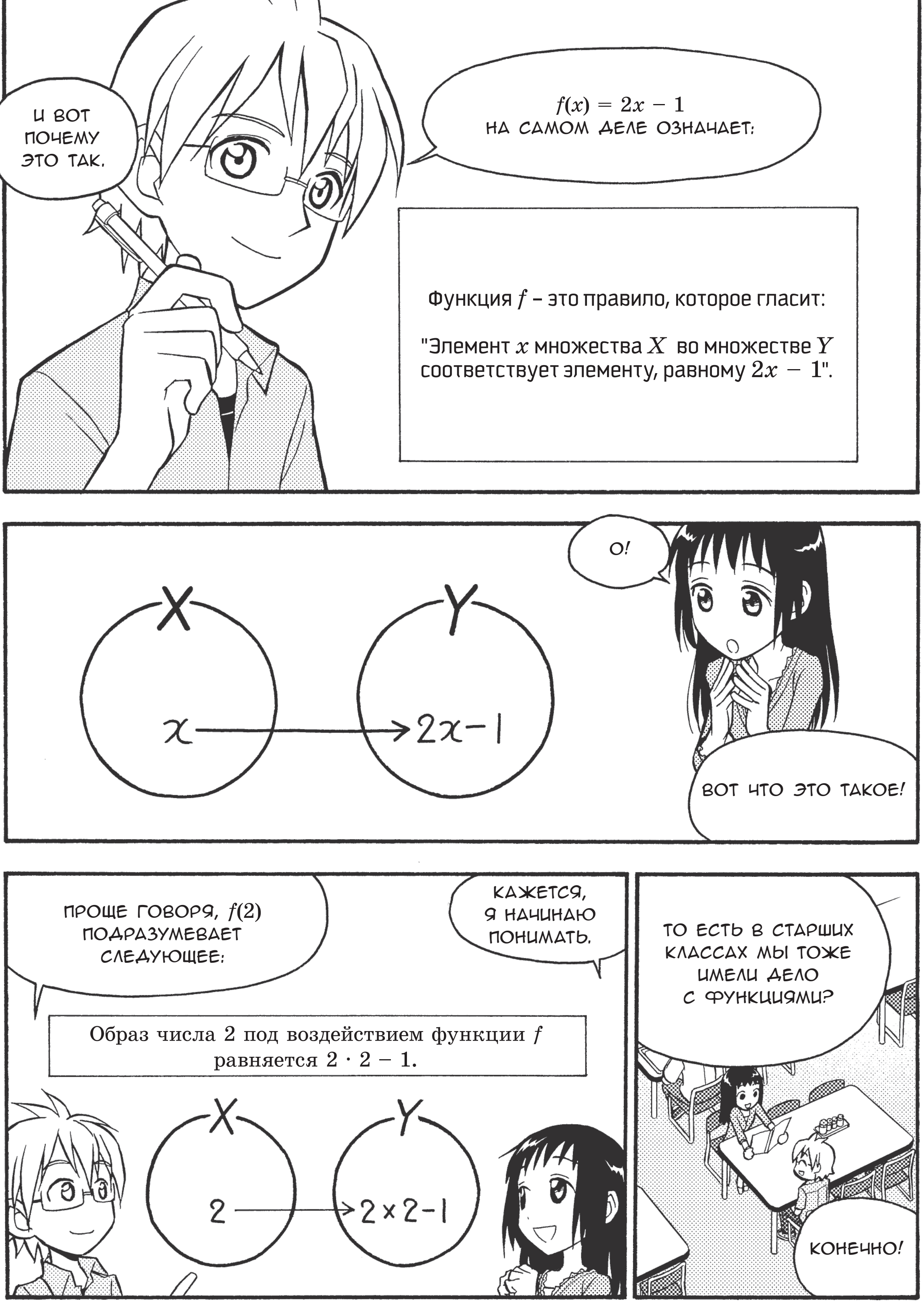




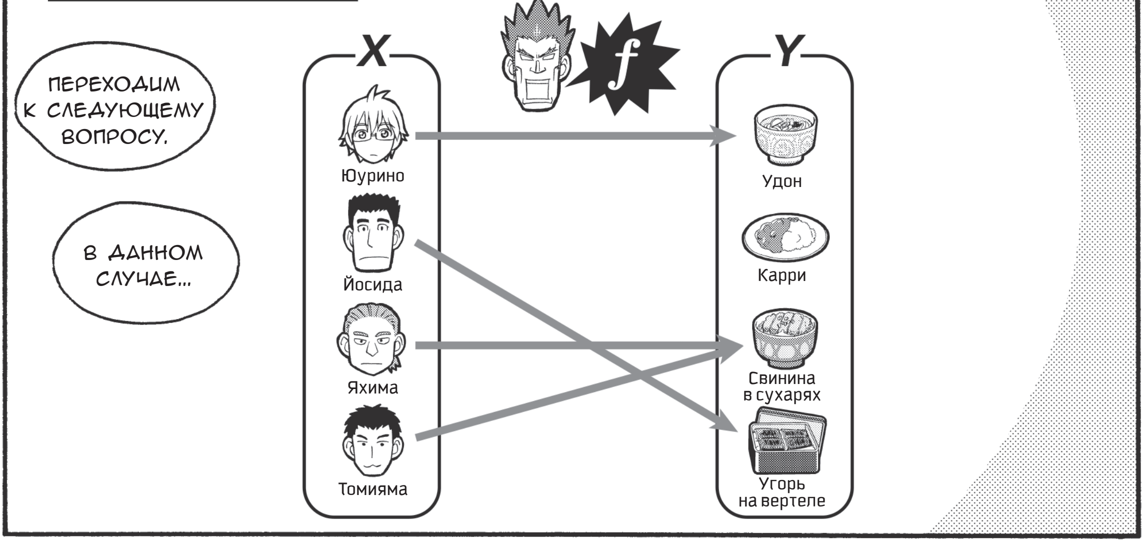
Образ

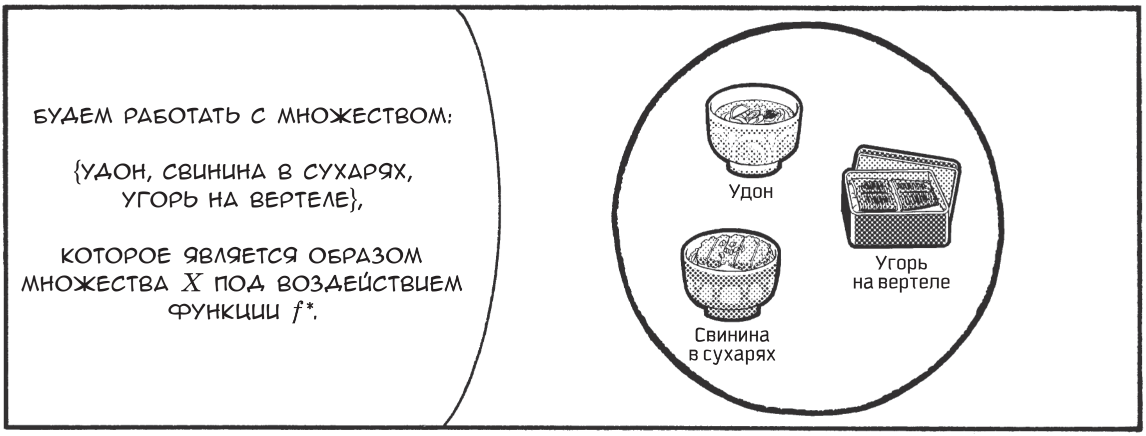
Это элемент множества Y, соответствующий элементу x_i множества X после прохождения через функцию f.


Кстати, ты помнишь вот такого вида формулу из курса алгебры в старших классах?
?
О... да, помню.
f(x)=2x-1
А ты никогда не задумывалась...
...что, почему-то вместо более простой записи y используется всегда странный символ $f(x)$?
"Как бы то ни было, если я хочу подставить 2 в эту формулу, я должна записать $f(2)$ и..."
Размышления Мисы
Вообще-то... задумывалась!

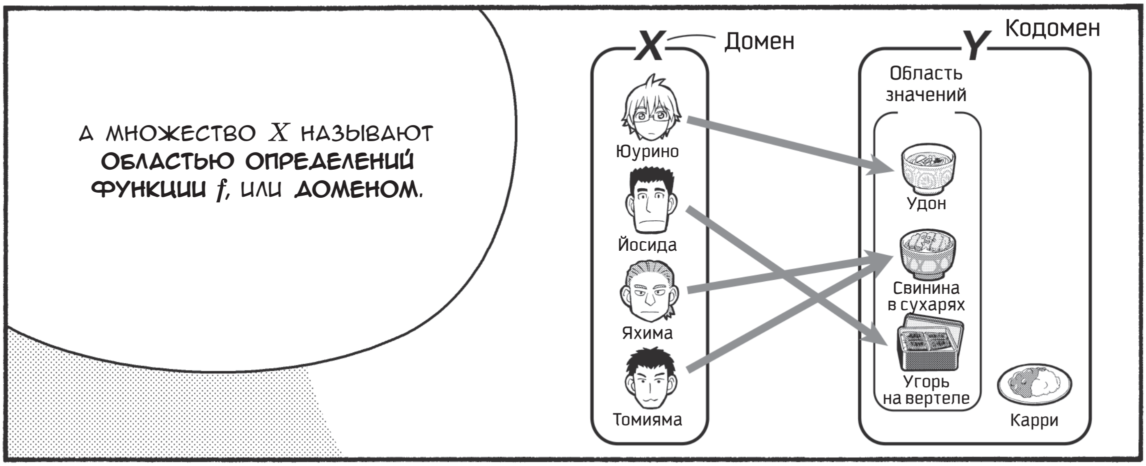

И ВОТ ПОЧЕМУ ЭТО ТАК.
$f(x) = 2x - 1$ НА САМОМ ДЕЛЕ ОЗНАЧАЕТ:
Функция f – это правило, которое гласит:
"Элемент x множества X во множестве Y соответствует элементу, равному $2x - 1$".
О!
X
Y
x → 2x−1
ВОТ ЧТО ЭТО ТАКОЕ!
ПРОЩЕ ГОВОРЯ, $f(2)$ ПОДРАЗУМЕВАЕТ СЛЕДУЮЩЕЕ:
КАЖЕТСЯ, Я НАЧИНАЮ ПОНИМАТЬ.
Образ числа 2 под воздействием функции f равняется $2 \cdot 2 - 1$.
X
Y
2 → 2×2−1
ТО ЕСТЬ В СТАРШИХ КЛАССАХ МЫ ТОЖЕ ИМЕЛИ ДЕЛО С ФУНКЦИЯМИ?
КОНЕЧНО!

2.4.3. Домен и кодомен





* Термин «образ» используется здесь для описания множества элементов Y, которые являются образом как минимум одного элемента X.



Кодомен – то же, что и область значений

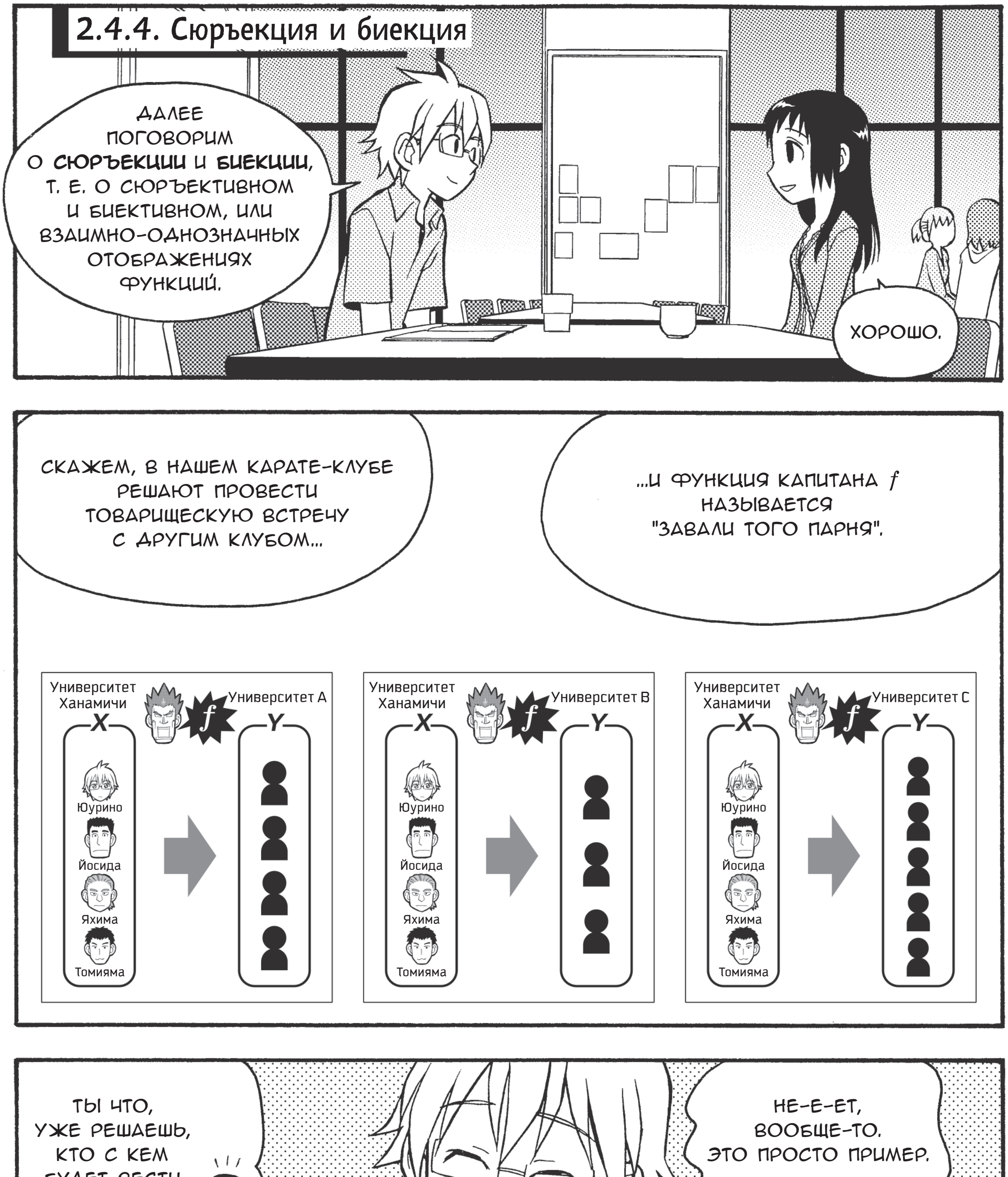
Множество, в котором находятся образы множества X посредством отображения f, называется областью значений функции f, а множество (возможно, больших размеров), к которому относится область значений, называется кодоменом.
Отношение между областью значений и кодоменом Y записывается так:

$$\{f(x_1),\ f(x_2),\ \dots,\ f(x_n)\} \subset Y.$$

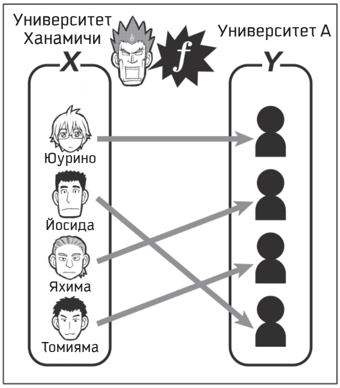
Другими словами, область значений функции f – это подмножество ее кодомена. В отдельно взятом случае, где все элементы Y – это образ некоего элемента в X, мы имеем:

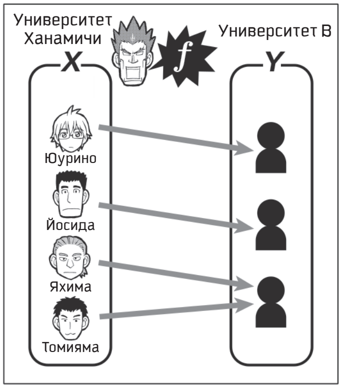
$$\{f(x_1),\ f(x_2),\ \dots,\ f(x_n)\} = Y.$$

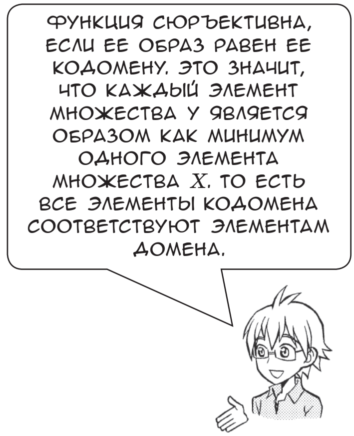
2.4.4. Сюръекция и биекция



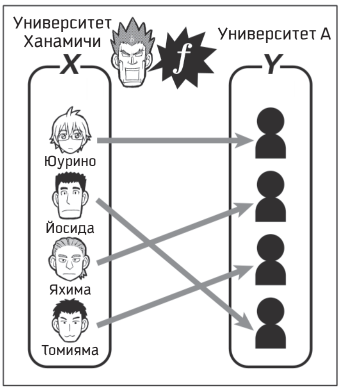
Сюръекция

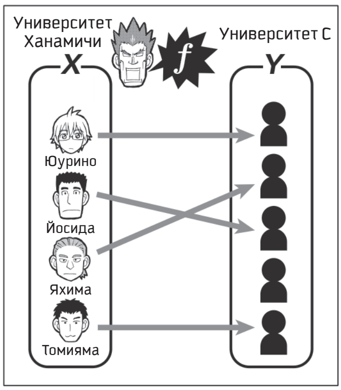


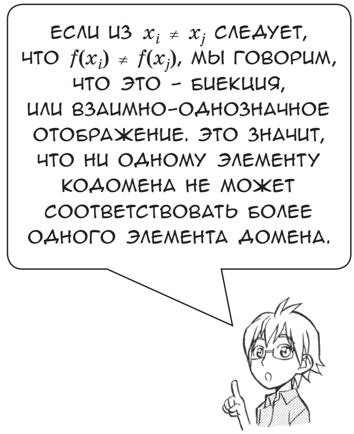




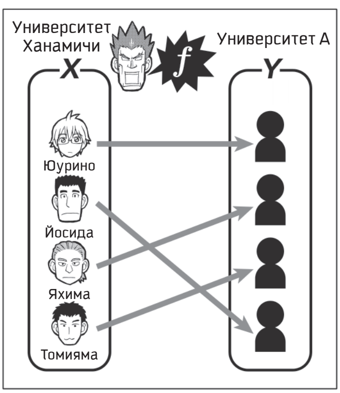
Биекция





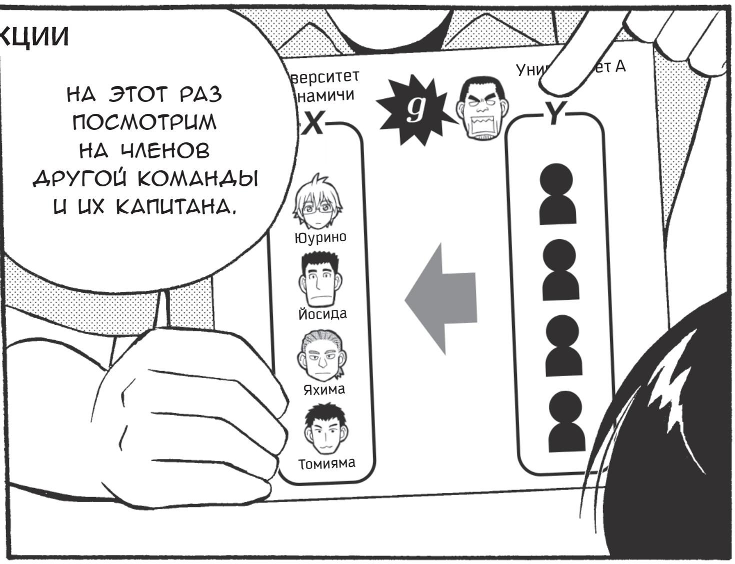


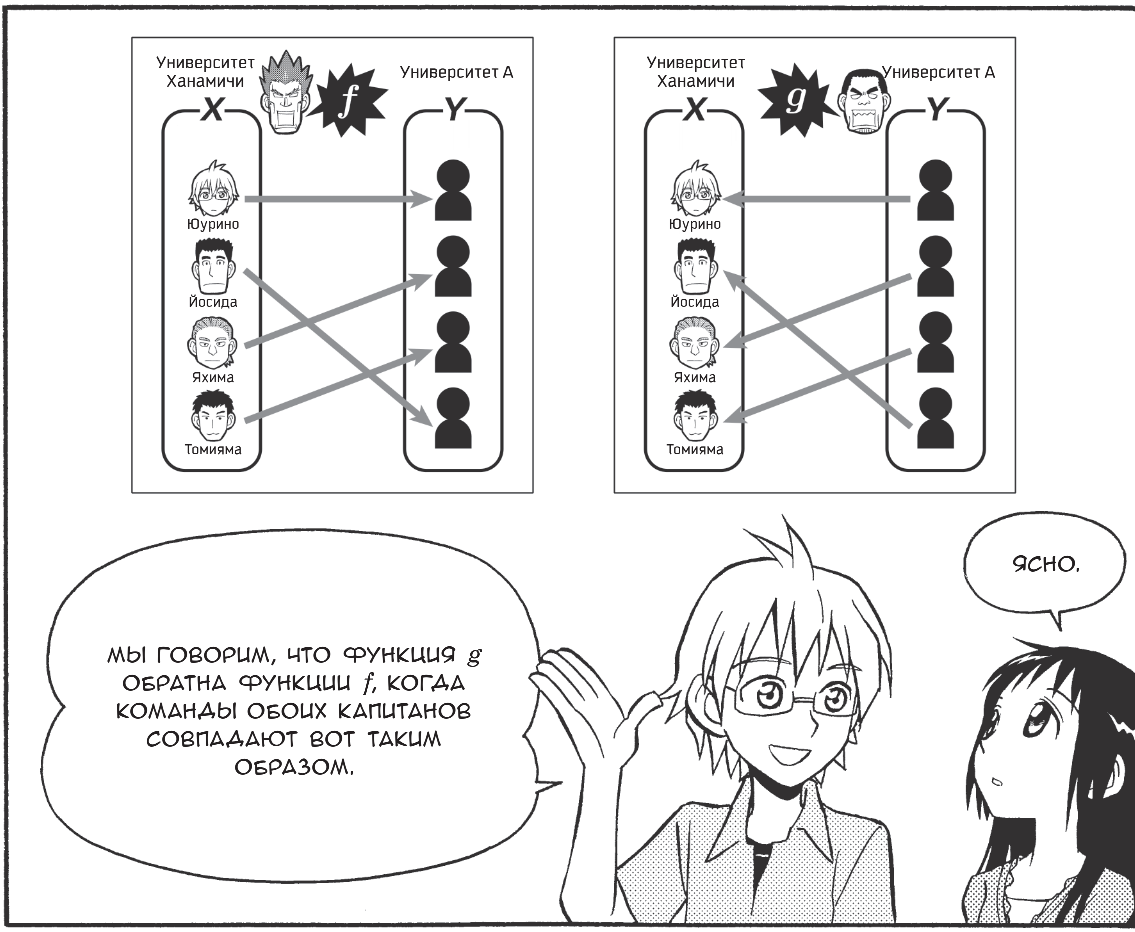
Биекция – одновременно сюръективная и биективная функция

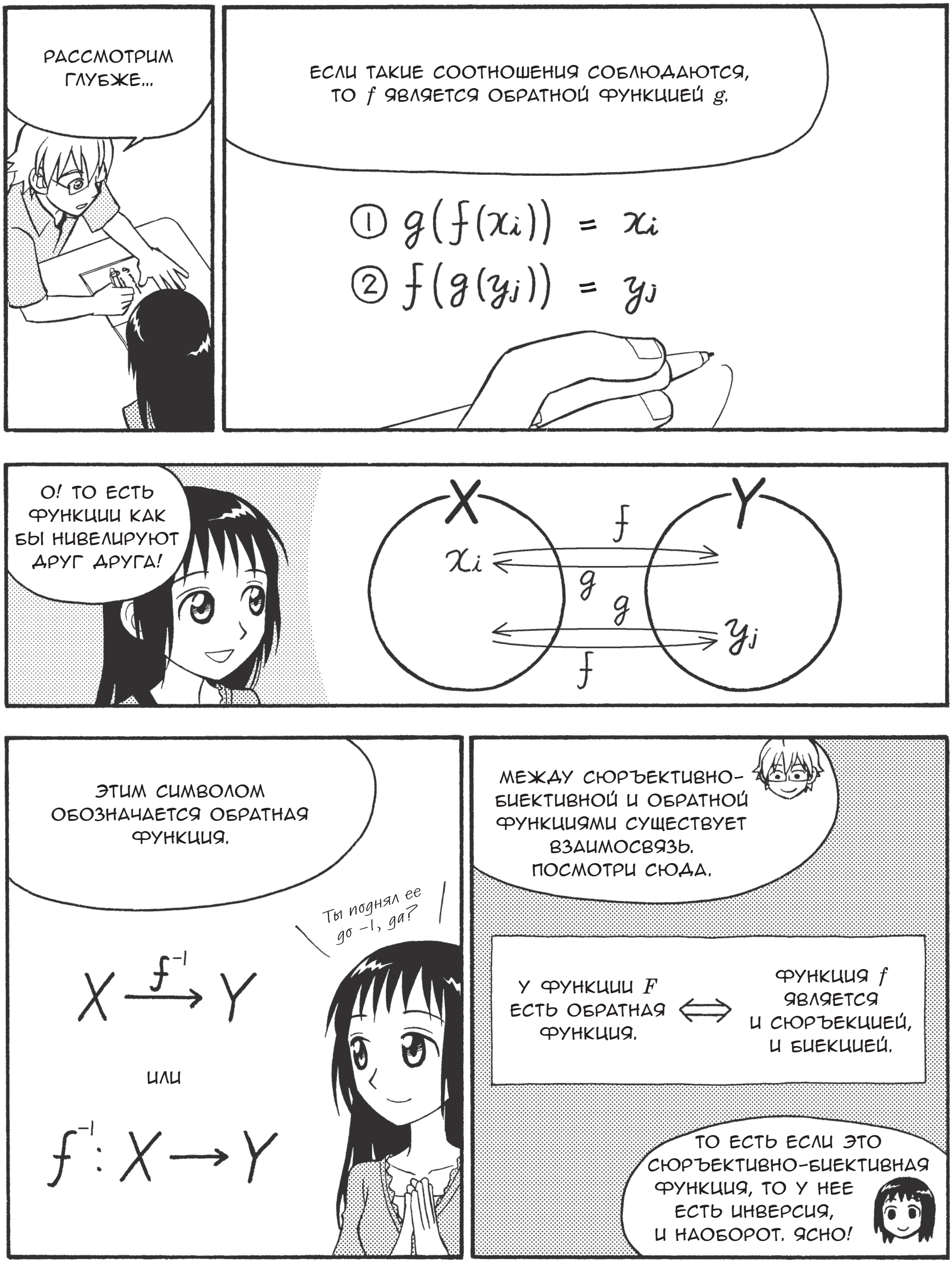


Примечание переводчика: у нас все это объясняется немного по-другому. Есть инъекция и сюръекция, а биекция – это когда обязательно выполняется и сюръекция, и инъекция одновременно (https://ru.wikipedia.org/wiki/Биекция).

2.4.5. Обратные функции

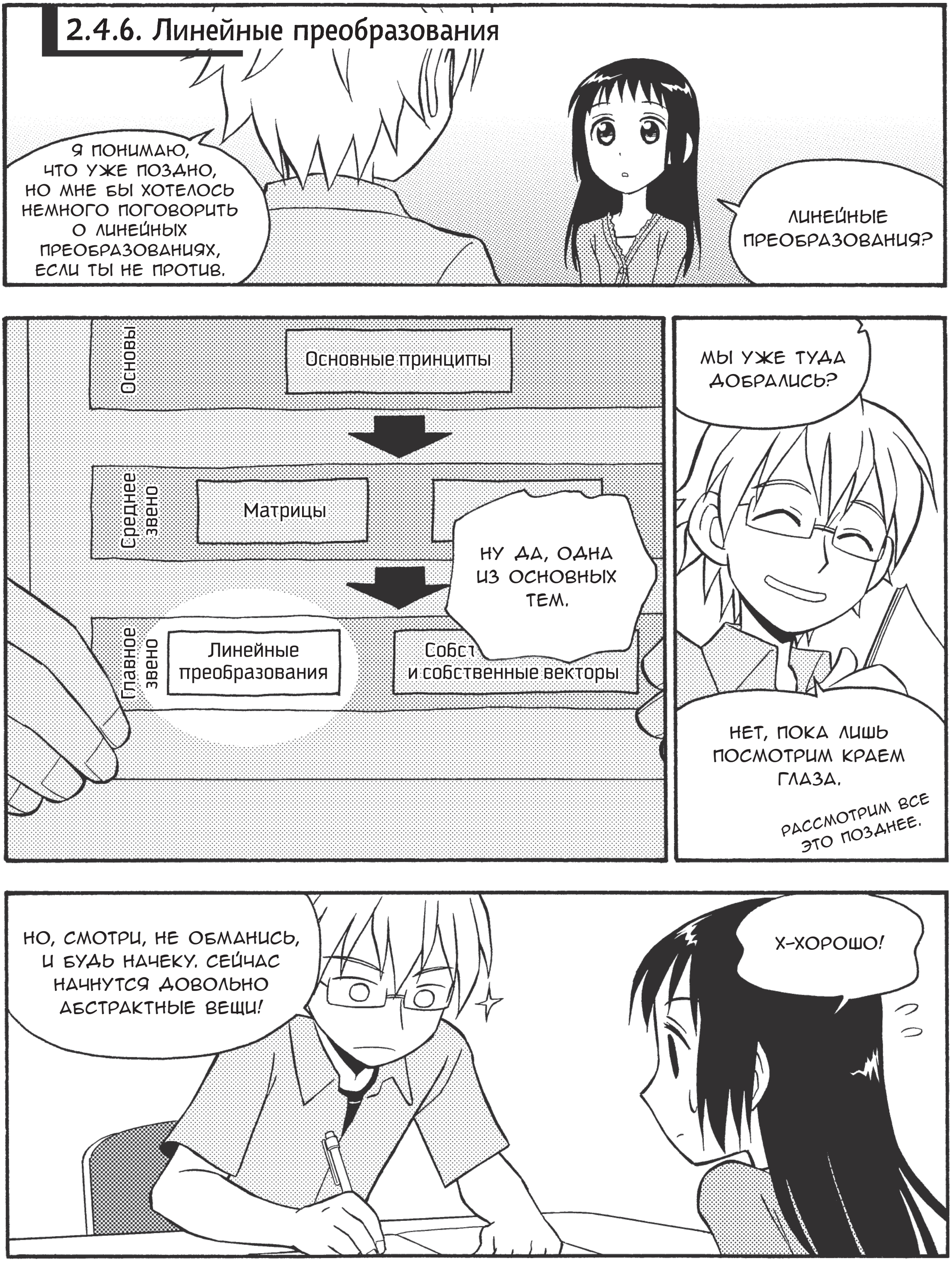






РАССМОТРИМ ГЛУБЖЕ...
ЕСЛИ ТАКИЕ СООТНОШЕНИЯ СОБЛЮДАЮТСЯ, ТО f ЯВЛЯЕТСЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИЕЙ g.
① $g(f(x_i)) = x_i$
② $f(g(y_j)) = y_j$
О! ТО ЕСТЬ ФУНКЦИИ КАК БЫ НИВЕЛИРУЮТ ДРУГ ДРУГА!
X
Y
f
x_i
g
g
y_j
f
ЭТИМ СИМВОЛОМ ОБОЗНАЧАЕТСЯ ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ.
$X \xrightarrow{f^{-1}} Y$
ИЛИ
$f^{-1}: X \to Y$
Ты поднял ее до −1, да?
МЕЖДУ СЮРЪЕКТИВНО-БИЕКТИВНОЙ И ОБРАТНОЙ ФУНКЦИЯМИ СУЩЕСТВУЕТ ВЗАИМОСВЯЗЬ. ПОСМОТРИ СЮДА.
У ФУНКЦИИ F ЕСТЬ ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ. $\Longleftrightarrow$ ФУНКЦИЯ f ЯВЛЯЕТСЯ И СЮРЪЕКЦИЕЙ, И БИЕКЦИЕЙ.
ТО ЕСТЬ ЕСЛИ ЭТО СЮРЪЕКТИВНО-БИЕКТИВНАЯ ФУНКЦИЯ, ТО У НЕЕ ЕСТЬ ИНВЕРСИЯ, И НАОБОРОТ. ЯСНО!

2.4.6. Линейные преобразования

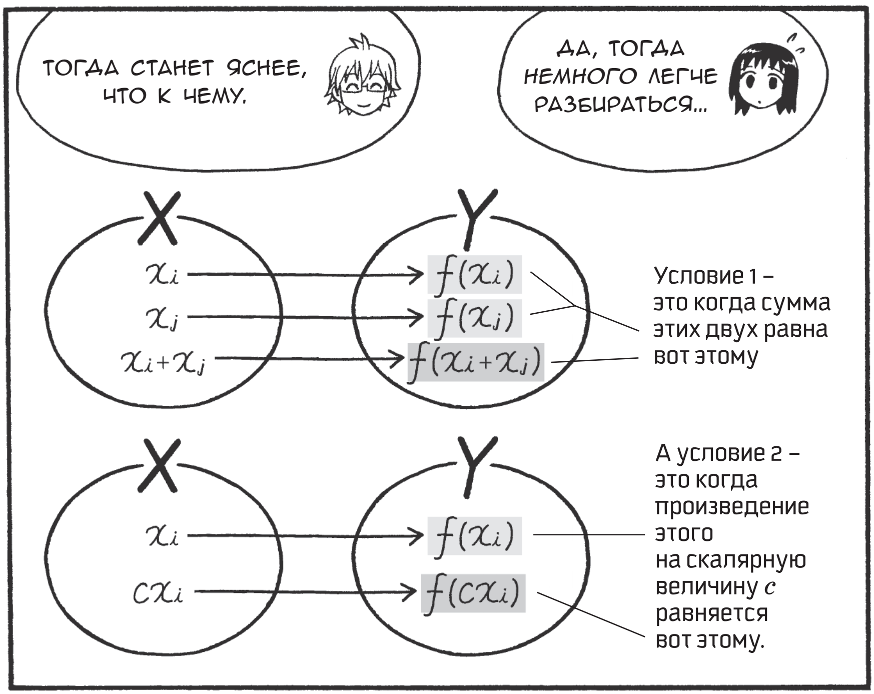


Линейные преобразования

Пусть x_i и x_j – это два произвольных элемента множества X, а c – это любое действительное число. Пусть f – это функция от X к Y. Функция f называется линейным преобразованием от X к Y, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x_i) + f(x_j) = f(x_i + x_j)$;

2) $cf(x_i) = f(cx_i)$.



Пример линейного преобразования

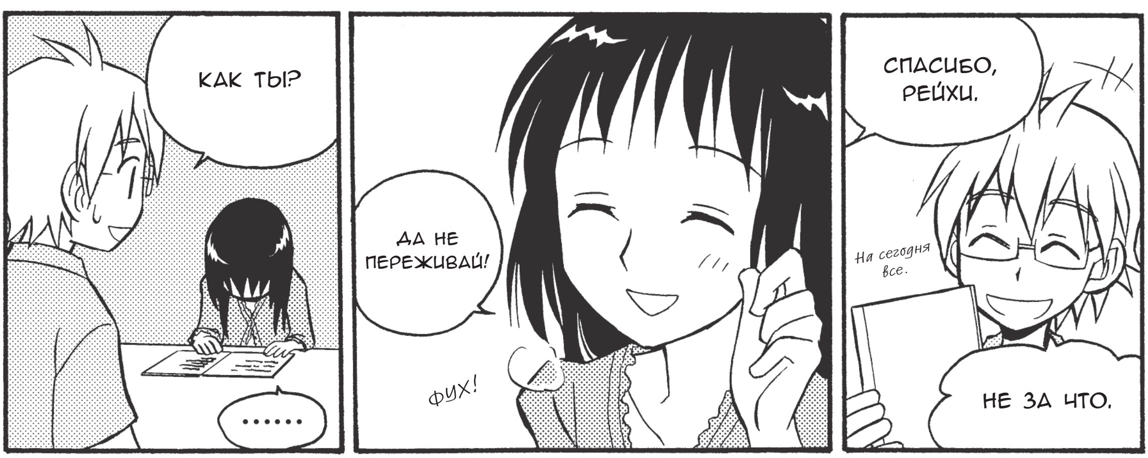
Функция $f(x) = 2x$ – это линейное преобразование, так как соблюдаются оба условия, и 1, и 2, как это видно по данной внизу таблице.

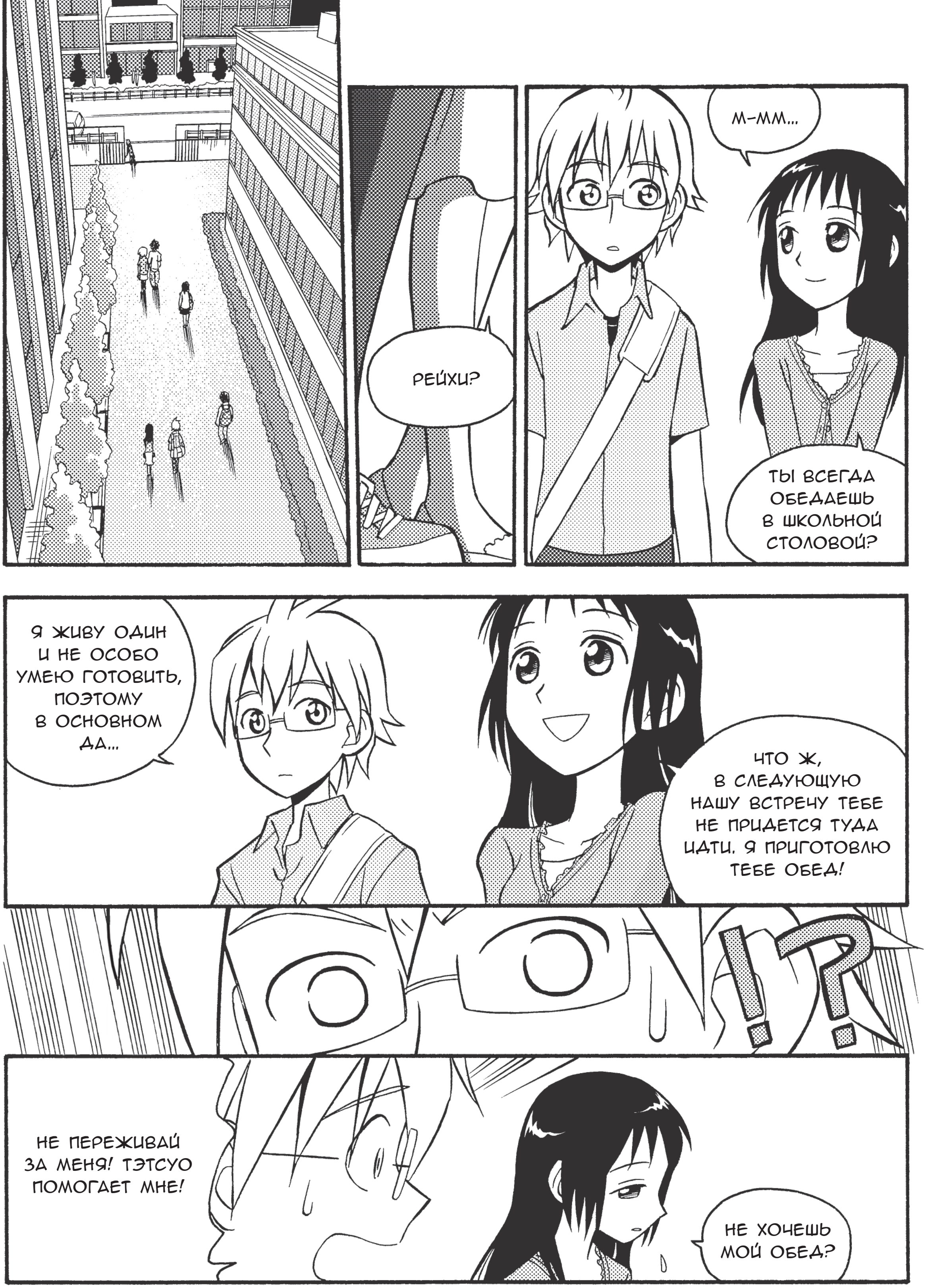
Условие 1	$\begin{cases} f(x_i)+f(x_j)=2x_i+2x_j \\ f(x_i+x_j)=2(x_i+x_j)=2x_i+2x_j \end{cases}$
Условие 2	$\begin{cases} cf(x_i)=c(2x_i)=2cx_i \\ f(cx_i)=2(cx_i)=2cx_i \end{cases}$

Пример функции, которая не является линейным преобразованием

Функция не является линейным преобразованием, так как не удовлетворяет ни одному из условий 1 и 2, как это видно по данной внизу таблице.

Условие 1	$\begin{cases} f(x_i)+f(x_j)=2x_i-1+2x_j-1=2x_i+2x_j-2 \\ f(x_i+x_j)=2(x_i+x_j)-1=2x_i+2x_j-1 \end{cases}$
Условие 2	$\begin{cases} cf(x_i)=c(2x_i-1)=2cx_i-c \\ f(cx_i)=2(cx_i)-1=2cx_i-1 \end{cases}$




РЕЙХИ?
М-ММ...
ТЫ ВСЕГДА ОБЕДАЕШЬ В ШКОЛЬНОЙ СТОЛОВОЙ?
Я ЖИВУ ОДИН И НЕ ОСОБО УМЕЮ ГОТОВИТЬ, ПОЭТОМУ В ОСНОВНОМ ДА...
ЧТО Ж, В СЛЕДУЮЩУЮ НАШУ ВСТРЕЧУ ТЕБЕ НЕ ПРИДЕТСЯ ТУДА ИДТИ. Я ПРИГОТОВЛЮ ТЕБЕ ОБЕД!
!?
НЕ ПЕРЕЖИВАЙ ЗА МЕНЯ! ТЭТСУО ПОМОГАЕТ МНЕ!
НЕ ХОЧЕШЬ МОЙ ОБЕД?


СПАСИБО, НО НЕТ. Э... ЭТО ПРОСТО...
УФ...
ХОТЯ, ПОЖАЛУЙ, Я НЕ ПРОТИВ...
...СЪЕСТЬ ТВОЙ ОБЕД.
ОТЛИЧНО!
Я ЧАСТО ГОТОВЛЮ ДЛЯ БРАТА. НУ, ЗНАЕШЬ, ТАКИЕ ОБЕДЫ... ДЛЯ СИЛАЧЕЙ.
ОУ... ОЧЕНЬ МИЛО.

2.5. ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Буквы α (альфа) и θ (фита), которые используются в математике, из греческого алфавита. Этот алфавит, как ясно из названия, используется в Греции.

Здесь приведены буквы греческого алфавита. Запоминать их необязательно, но при возможности можно просмотреть.

Прописные	Строчные	Название	
Α	α	alpha	альфа
Β	β	beta	бета
Γ	γ	gamma	гамма
Δ	Δ	delta	дельта
Ε	ε	epsilon	эпсилон
Ζ	ζ	zeta	дзета
Η	η	eta	эта
Θ	θ	theta	тета
Ι	ι	iota	йота
Κ	κ	kappa	каппа
Λ	λ	lambda	лямбда
Μ	μ	mu	мю
Ν	ν	nu	ню
Ξ	ξ	xi	кси
Ο	ο	omicron	омикрон
Π	π	pi	пи
Ρ	ρ	rho	ро
Σ	σ	sigma	сигма
Τ	τ	tau	тау
Υ	υ	upsilon	упсилон
Φ	ϕ (φ)	phi	фи
Χ	χ	chi	хи
Ψ	ψ	psi	пси
Ω	ω	omega	омега

2.6. НАУЧНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

В мире науки о:

- сложении;
- вычитании;
- умножении;
- делении

говорят так, как обычно не выражаются.

Эти выражения собраны в табличке ниже. Мы будем использовать выражения из колонки «Научные выражения», так что обратите на них внимание.

	Обычно говорят	Научные выражения 1	Научные выражения 2
$6 + 2 = 8$	6 плюс 2 равно 8	К 6 прибавить 2, получится 8	Сумма 6 и 2 равняется 8
$6 - 2 = 4$	6 минус 2 равно 4	Из 6 вычесть 2, получится 4	Разность 6 и 2 равняется 4
$6 \times 2 = 12$	6 умножить на 2 равно 12	6 умножить на 2, получится 12	Произведение 6 и 2 равняется 12
$6 \div 2 = 3$	6 разделить на 2 равно 3	6 разделить на 2, получится 3	Частное 6 и 2 равняется 3

2.7. СОЧЕТАНИЯ И ПЕРЕСТАНОВКИ

Думаю, лучший способ объяснить, что такое сочетания и перестановки, – это привести конкретный пример.

Начну с объяснения **Задача**, затем я обосную правильный **Способ решения**, а потом предоставлю **Решение**.

Задача

Несколько дней назад Рейхи купил CD-диск, где записано семь разных песен. Назовем эти песни A, B, C, D, E, F и G. На следующий день он собирал вещи для автомобильной поездки со своим другом Немото, и тут его осенило, что хорошо бы взять эти песни с собой, чтобы слушать в дороге. Но все песни он взять не хотел, потому что у них с Немото были разные музыкальные вкусы. После небольших раздумий он решил записать на чистый CD-диск всего три песни из семи.

Вопросы

1. Сколько существует способов отбора трех песен из первоначальных семи?
2. Сколько существует способов установления порядка этих песен?
3. Сколько есть способов записи на CD-диск трех песен, выбранных из семи возможных?

Способ решения

Пункт 3 можно решить, разделив его на два подпункта:

1) выбрать три песни из семи возможных;
2) выбрать порядок их проигрывания.

Возможно, как вы уже поняли, это первые два вопроса. Значит, решение вопроса номер 3 будет следующим:

Решение вопроса № 1 × Решение вопроса № 2 = Решение вопроса № 3.

Решение

1. Сколько есть способов отобрать три песни из первоначальных семи?

В приведенной ниже таблице представлены все 35 способов отбора песен. Не стесняйся, знакомься с ними.

Вариант 1	A и B и C
Вариант 2	A и B и D
Вариант 3	A и B и E
Вариант 4	A и B и F
Вариант 5	A и B и G
Вариант 6	A и C и D
Вариант 7	A и C и E
Вариант 8	A и C и F
Вариант 9	A и C и G
Вариант 10	A и D и E
Вариант 11	A и D и F
Вариант 12	A и D и G
Вариант 13	A и E и F
Вариант 14	A и E и G
Вариант 15	A и F и G

Вариант 16	B и C и D
Вариант 17	B и C и E
Вариант 18	B и C и F
Вариант 19	B и C и G
Вариант 20	B и D и E
Вариант 21	B и D и F
Вариант 22	B и D и G
Вариант 23	B и E и F
Вариант 24	B и E и G
Вариант 25	B и F и G
Вариант 26	C и D и E
Вариант 27	C и D и F
Вариант 28	C и D и G
Вариант 29	C и E и F
Вариант 30	C и E и G
Вариант 31	C и F и G
Вариант 32	D и E и G
Вариант 33	D и E и F
Вариант 34	D и F и G
Вариант 35	E и F и G

Выбор k пунктов из n пунктов без учета порядка, в котором они выбираются, называется **сочетанием**. Число возможных способов выбора записывается так:

$${}_nC_k,$$

что читается как «сочетание из n по k».
В нашем случае

$${}_7C_3 = 35.$$

2. Сколько существует способов установить порядок этих песен?

Давайте предположим, что мы выбрали песни A, B и C. В этой таблице показаны 6 различных способов определения их порядка.

Песня 1	**Песня 2**	**Песня 3**
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

А если бы мы выбрали B, E и G, то:

Песня 1	**Песня 2**	**Песня 3**
B	E	G
B	G	E
E	B	G
E	G	B
G	B	E
G	E	B

Пробуя другие выборки, мы обнаруживаем закономерность: число возможных сочетаний не зависит от того, какие именно три элемента мы выбираем. В результате всегда получаем шесть комбинаций. И вот почему:

Наш результат (6) можно записать иначе, как результат операции: $3\times2\times1$, получаемой следующим образом:

1. Мы начинаем со всех трех песен и можем выбрать любую одну из них в качестве первой на диске.
2. Когда мы выбираем вторую песню, то выбирать приходится из оставшихся двух песен.
3. В качестве нашей последней песни мы можем выбрать только одну.

Это дает нам

$$3 \text{ возможности} \times 2 \text{ возможности} \times 1 \text{ возможность} = 6 \text{ возможностей.}$$

3. Сколько существует способов записи на CD-диск трех песен, выбранных из семи возможных?

Возможные решения таковы:

Количество способов выбора трех песен из семи	$\cdot$	Количество способов, которыми можно установить порядок трех песен

$$= {}_7C_3 \cdot 6$$
$$= 35 \cdot 6$$
$$= 210.$$

Это значит, что существует 210 различных комбинаций для записи на наш CD-диск.

Выбор трех единиц из семи возможных в определенном порядке определяется перестановкой выбранных элементов. Число возможных перестановок k объектов, отобранных из n объектов, записывается так:

$${}_nP_k.$$

В нашем случае это:

$${}_7P_3 = 210.$$

Число способов, которыми n объектов можно выбрать из n возможных объектов, равно n факториалу ($n!$):

$${}_nP_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Я перечислил все возможные способы выбора трех песен из семи первоначальных песен (A, B, C, D, E, F и G) в приведенной ниже таблице.

	Песня 1	**Песня 2**	**Песня 3**
Вариант 1	A	B	C
Вариант 2	A	B	D
Вариант 3	A	B	E
...	...	...	...
Вариант 30	A	G	F
Вариант 31	B	A	C
...	...	...	...
Вариант 60	B	G	F
Вариант 61	C	A	B
...	...	...	...
Вариант 90	C	G	F
Вариант 91	D	A	B
...	...	...	...
Вариант 120	D	G	F
Вариант 121	E	A	B
...	...	...	...
Вариант 150	E	G	F
Вариант 151	F	A	B
...	...	...	...
Вариант 180	F	G	E
Вариант 181	G	A	B
...	...	...	...
Вариант 209	G	E	F
Вариант 210	G	F	E

По аналогии с предыдущим примером мы можем переписать проблему подсчета различных способов того, как записать наши песни на CD-диске, в виде $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. Вот как мы получили эти числа:

1. Мы можем выбрать любую из **7** песен A, B, C, D, E, F и G в качестве первой песни.
2. Затем мы можем выбрать любую из оставшихся **6** в качестве второй песни.
3. И наконец, мы выбираем любую из **5** в качестве заключительной.

${}_7C_3 \times 6 = 210$, т. е. количество способов, которыми можно выбрать три песни из семи, можно записать таким образом:

$$\begin{aligned}
{}_7C_3 \times 6 &= 210; \\
{}_7C_3 \times (3 \times 2 \times 1) &= 7 \times 6 \times 5; \\
{}_7C_3 &= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}.
\end{aligned}$$

Иными словами, ${}_nC_r$ (т. е. количество способов, которыми можно выбрать r предметов из n) можно записать вот так:

$$\begin{aligned}
{}_nC_r &= \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(r-1))}{r \times (r-1) \times \ldots \times 1} \\
&= \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(r-1))}{r \times (r-1) \times \ldots \times 1} \times \frac{(n-r) \times (n-(r+1)) \times \ldots \times 1}{(n-r) \times (n-(r+1)) \times \ldots \times 1}.
\end{aligned}$$

Пожалуйста, запомните это.

В математике можно также записать:

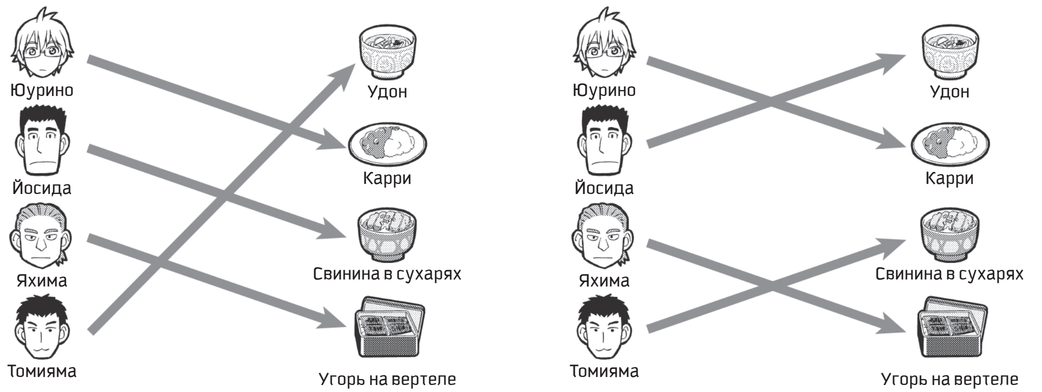
- $3 \times 2 \times 1$ как 3!
- $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ как 7!

И ${}_nC_r$ можно записать следующим образом:

$${}_nC_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}.$$

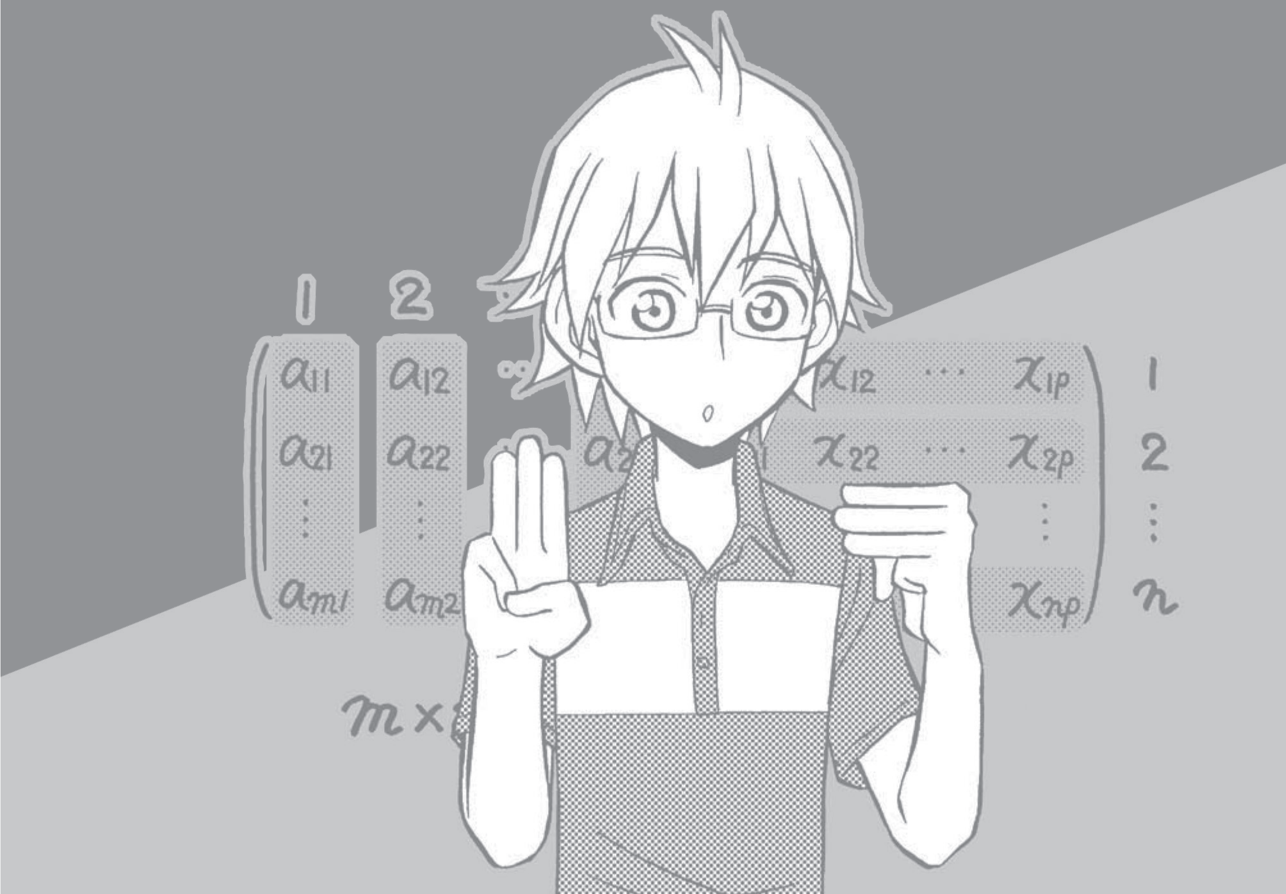
2.8. НЕ ВСЕ "КОМАНДЫ К ВЫПОЛНЕНИЮ" ЯВЛЯЮТСЯ ФУНКЦИЯМИ

В качестве функций мы на стр. 41, 42 рассмотрели три команды: «Выбрать самое дешевое!», «Выбрать всем разное!» и «Выбрать по вкусу!». Надо заметить, что «Выбрать всем разное!» на самом деле не совсем функция, строго говоря, потому что есть несколько способов выполнить эту команду (см. рисунок).

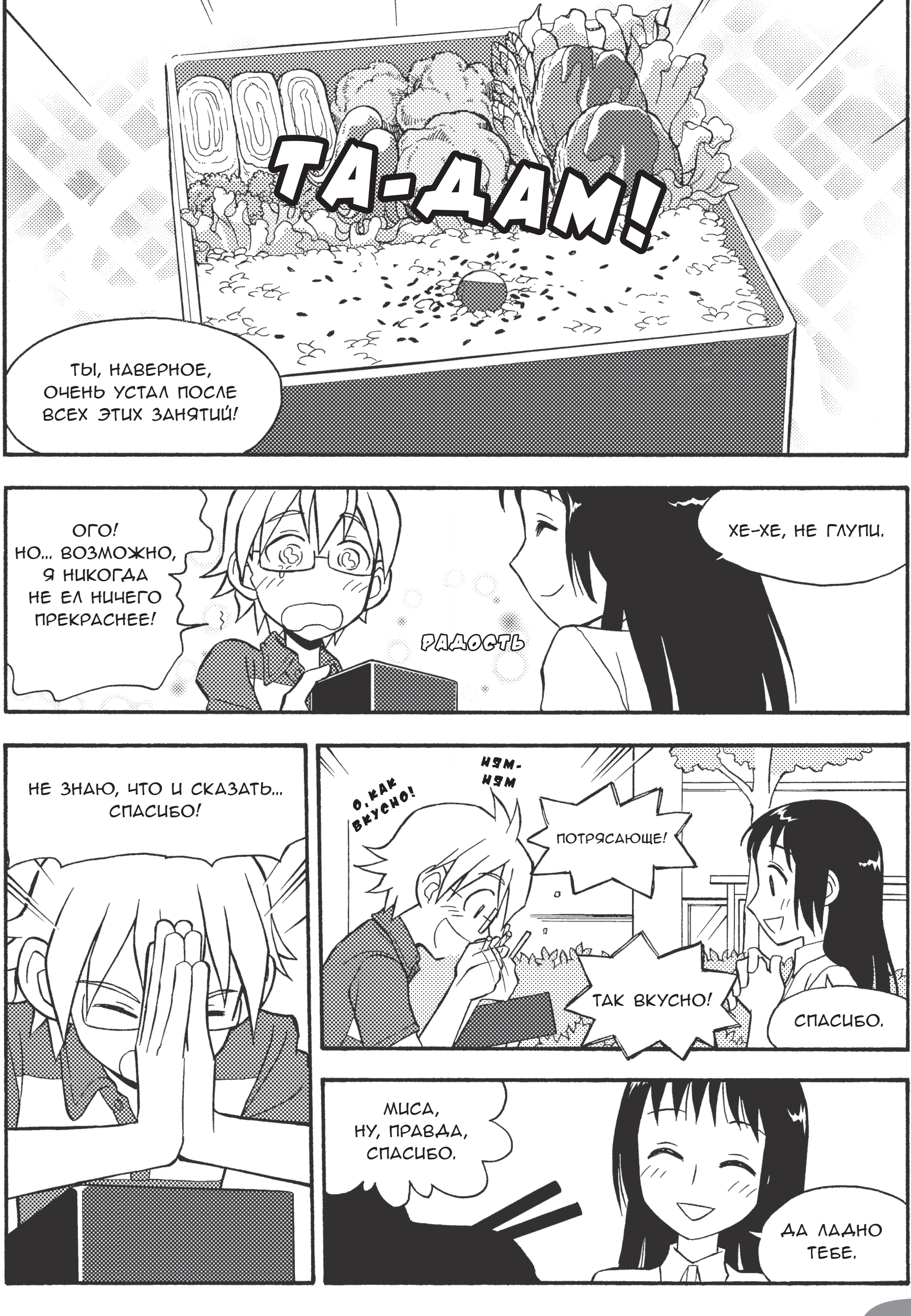


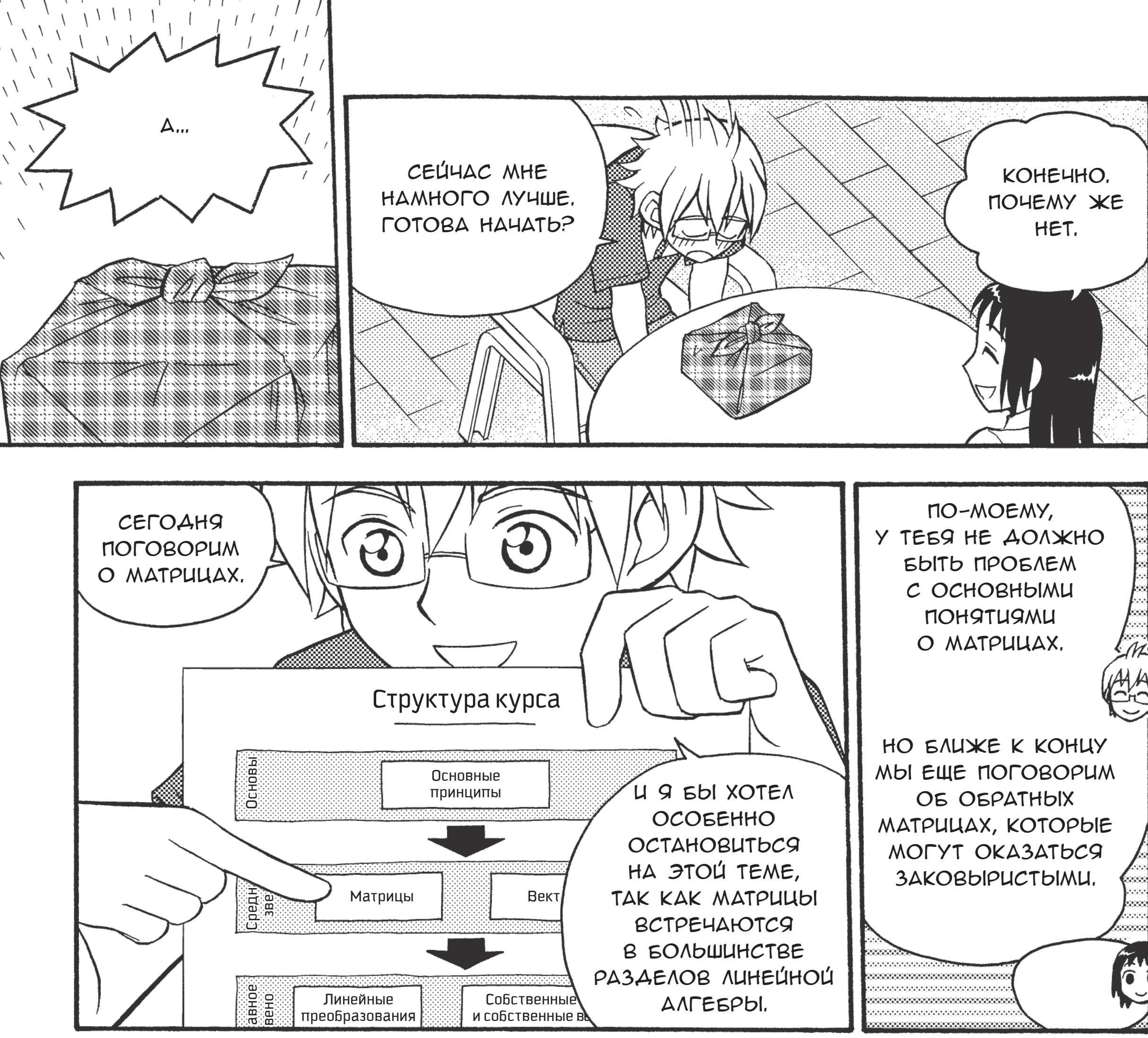
Глава 3

Познакомимся с матрицами

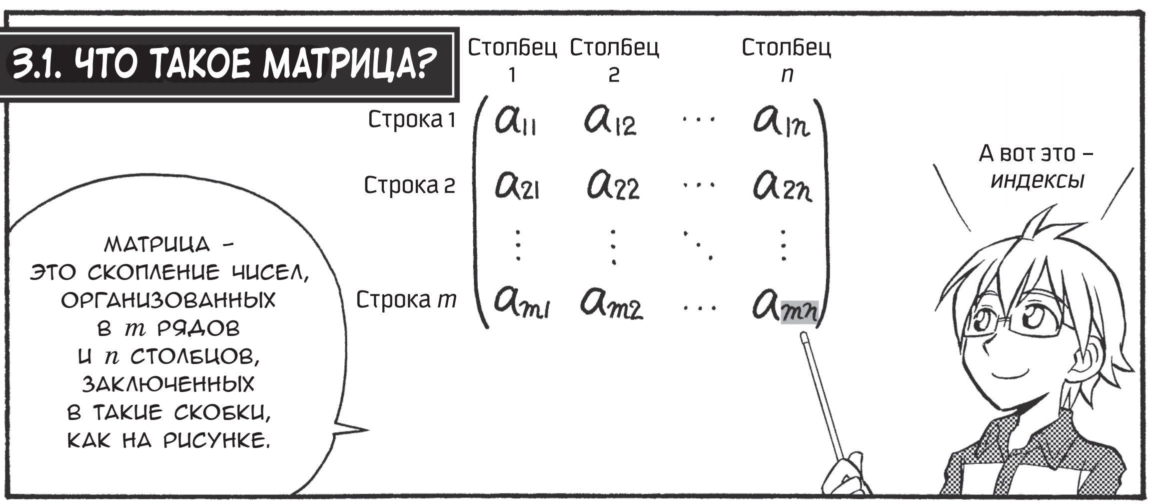


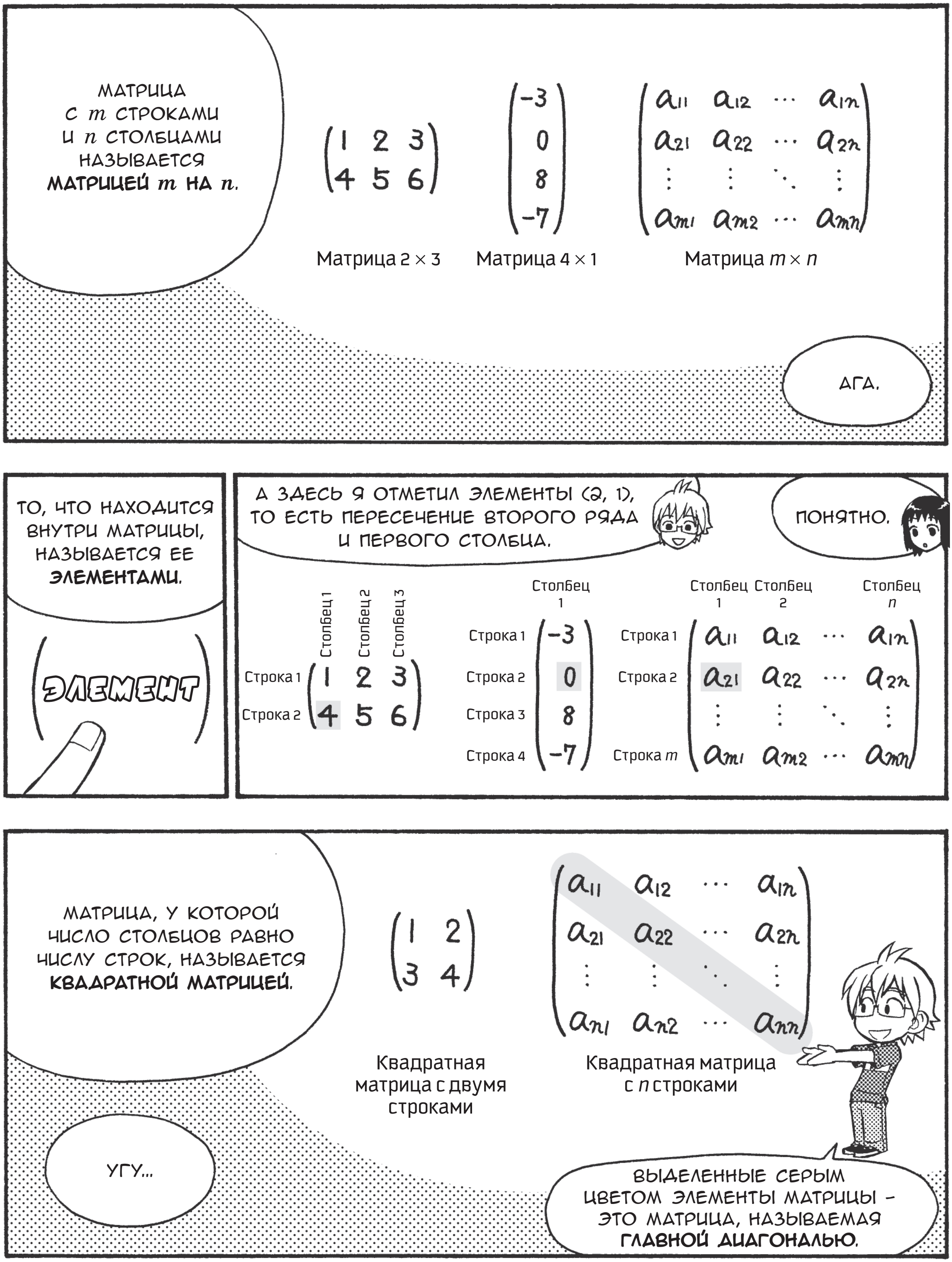

ИЙЯ!
ИЙЯ!
ВЛОЖИСЬ В УДАР!
ЮУРИНО!
А НЕ ТОЛЬКО РУКАМИ РАБОТАЙ!
КОРПУСОМ!
ОССУ!
Я ДУМАЛ, ОН СРАЗУ БРОСИТ ЗАНЯТИЯ...
НО, ВИДИМО, Я ОШИБСЯ.
ХЕ-ХЕ
フフン


ТА-ДАМ!
ТЫ, НАВЕРНОЕ, ОЧЕНЬ УСТАЛ ПОСЛЕ ВСЕХ ЭТИХ ЗАНЯТИЙ!
ОГО! НО... ВОЗМОЖНО, Я НИКОГДА НЕ ЕЛ НИЧЕГО ПРЕКРАСНЕЕ!
РАДОСТЬ
ХЕ-ХЕ, НЕ ГЛУПИ.
НЕ ЗНАЮ, ЧТО И СКАЗАТЬ... СПАСИБО!
О, КАК ВКУСНО!
НЯМ-НЯМ
ПОТРЯСАЮЩЕ!
ТАК ВКУСНО!
СПАСИБО.
МИСА, НУ, ПРАВДА, СПАСИБО.
ДА ЛАДНО ТЕБЕ.



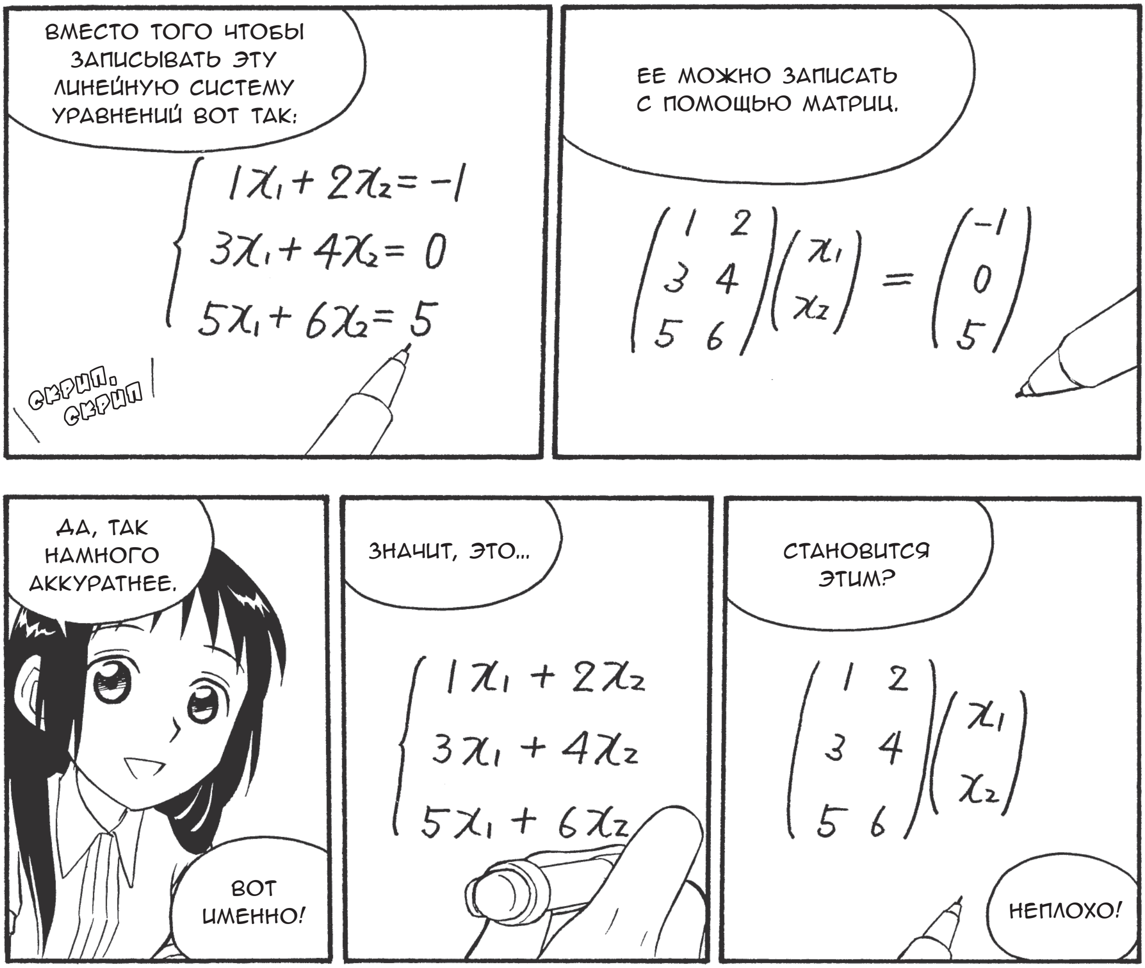
3.1. ЧТО ТАКОЕ МАТРИЦА?





Матрица с m строками и n столбцами называется **матрицей m на n.**
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
Матрица 2×3
$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$
Матрица 4×1
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
Матрица $m \times n$
Ага.
То, что находится внутри матрицы, называется ее **элементами.**
Элемент
А здесь я отметил элементы (2, 1), то есть пересечение второго ряда и первого столбца.
Понятно.
Столбец 1
Столбец 2
Столбец 3
Строка 1
Строка 2
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{4} & 5 & 6 \end{pmatrix}$
Столбец 1
Строка 1
Строка 2
Строка 3
Строка 4
$\begin{pmatrix} -3 \\ \boxed{0} \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$
Столбец 1
Столбец 2
Столбец n
Строка 1
Строка 2
Строка m
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
Матрица, у которой число столбцов равно числу строк, называется **квадратной матрицей.**
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
Квадратная матрица с двумя строками
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
Квадратная матрица с n строками
Угу...
Выделенные серым цветом элементы матрицы – это матрица, называемая **главной диагональю.**


ГМММ... МАТРИЦЫ НЕ ТАКИЕ УВЛЕКАТЕЛЬНЫЕ, КАКИМИ ОНИ КАЖУТСЯ В ХУДОЖЕСТВЕННЫХ ФИЛЬМАХ.
МММ...
ДА, ТОЛЬКО ЧИСЛА И НИКАКОГО КИАНУ РИВЗА...
УВЛЕКАТЕЛЬНЫЕ ИЛИ НЕТ, НО МАТРИЦЫ ОЧЕНЬ НУЖНЫ.
• С их помощью очень удобно компактно записывать системы линейных уравнений.
• Так как они позволяют делать компактные записи, они и книги по математике делают более компактными.
• А также помогают преподавателям быстрее писать на доске во время занятий.
ЭТО ПОЧЕМУ ЖЕ?
И ЭТО ЕЩЕ НЕ ВСЕ ПРЕИМУЩЕСТВА.
ТО ЕСТЬ ИМИ ПОЛЬЗУЮТСЯ, ПОТОМУ ЧТО ОНИ ПРАКТИЧНЫ?
УГУ.

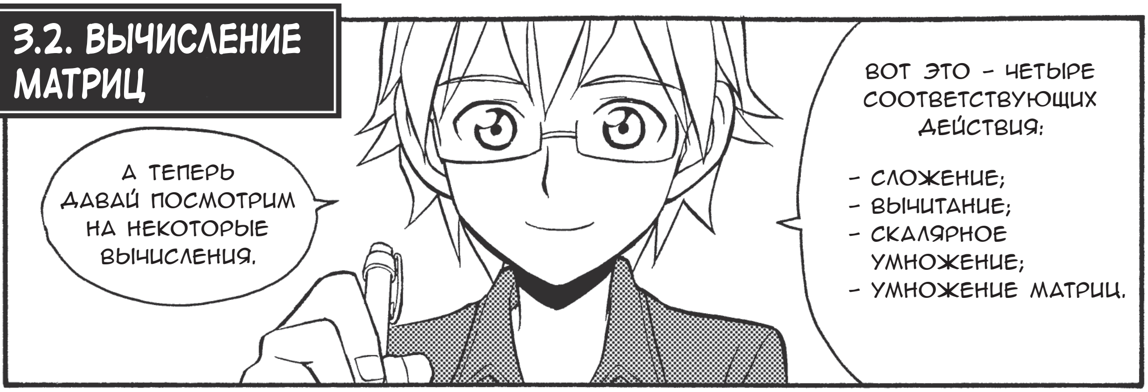


Запись систем уравнений в виде матриц

- $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ записывается так: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

- $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$ записывается так: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

3.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦ



3.2.1. Сложение

Давай сложим матрицу $\mathbf{3\times 2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ с другой матрицей $\mathbf{3\times 2}$ $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, то есть: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Элементы матриц будут складываться следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1+6 & 2+5 \\ 3+4 & 4+3 \\ 5+2 & 6+1 \end{pmatrix}$$

Заметь, что сложение и вычитание работают только в случае, когда матрицы имеют одинаковый размер.

Примеры

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+5 \\ 3+4 & 4+3 \\ 5+2 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$
- $(10 \quad 10) + (-3 \quad -6) = (10+(-3) \quad 10+(-6)) = (7 \quad 4)$
- $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+(-3) \\ 10+(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

3.2.2. Вычитание

Давай вычтем матрицу 3×2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ из другой матрицы 3×2 $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, то есть: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Их элементы будут похожими на сложение, но полученными вычитанием друг из друга:

$$\begin{pmatrix} 1-6 & 2-5 \\ 3-4 & 4-3 \\ 5-2 & 6-1 \end{pmatrix}$$

Примеры

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6 & 2-5 \\ 3-4 & 4-3 \\ 5-2 & 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
- $(10 \quad 10) - (-3 \quad -6) = (10-(-3) \quad 10-(-6)) = (13 \quad 16)$
- $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-(-3) \\ 10-(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 16 \end{pmatrix}$

3.2.3. Скалярное умножение

Давай умножим матрицу 3×2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ на 10. То есть:

$$10\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Каждый элемент матрицы умножится на 10:

$$\begin{pmatrix} 10\times1 & 10\times2 \\ 10\times3 & 10\times4 \\ 10\times5 & 10\times6 \end{pmatrix}$$

Примеры

- $10\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\times1 & 10\times2 \\ 10\times3 & 10\times4 \\ 10\times5 & 10\times6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{pmatrix}$
- $2\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times3 & 2\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix}$
- $2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times3 \\ 2\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

3.2.4. Умножение матриц

Обратите внимание на то, что написано под заголовком «в случае использования матриц $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{cases}$ записывается как $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$».

Например, произведение матрицы 3×3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ и матрицы 2×2 $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

записывается скорее не как «произведение», а просто $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, иными словами, только как $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{cases}$ и $\begin{cases} 1y_1 + 2y_2 \\ 3y_1 + 4y_2 \\ 5y_1 + 6y_2 \end{cases}$.

Пример

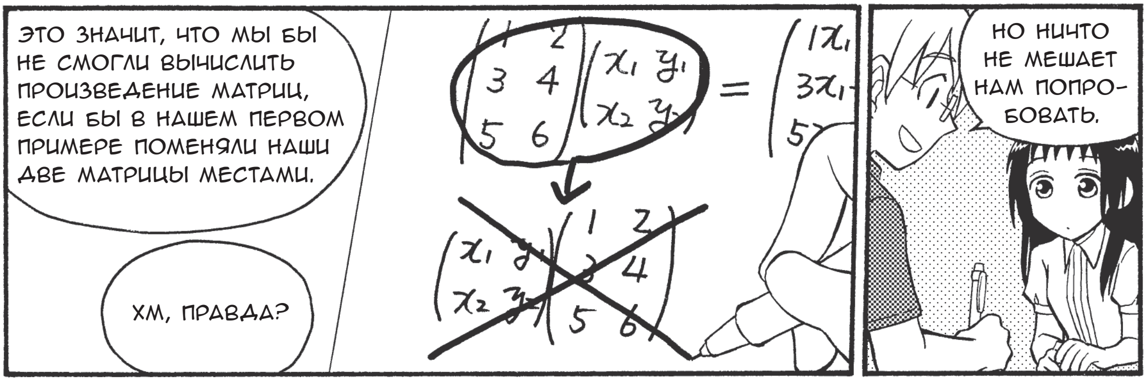
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 & 1y_1 + 2y_2 \\ 3x_1 + 4x_2 & 3y_1 + 4y_2 \\ 5x_1 + 6x_2 & 5y_1 + 6y_2 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\times3+(-3)\times1 & 8\times1+(-3)\times2 \\ 2\times3+\ \ 1\times1 & 2\times1+\ \ 1\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24-3 & 8-6 \\ 6+1 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times8+1\times2 & 3\times(-3)+1\times1 \\ 1\times8+2\times2 & 1\times(-3)+2\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24+2 & -9+1 \\ 8+4 & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -8 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array}$$

Если матрицу $n \times p$ взять $m \times n$ раз, то получится матрица $m \times p$.

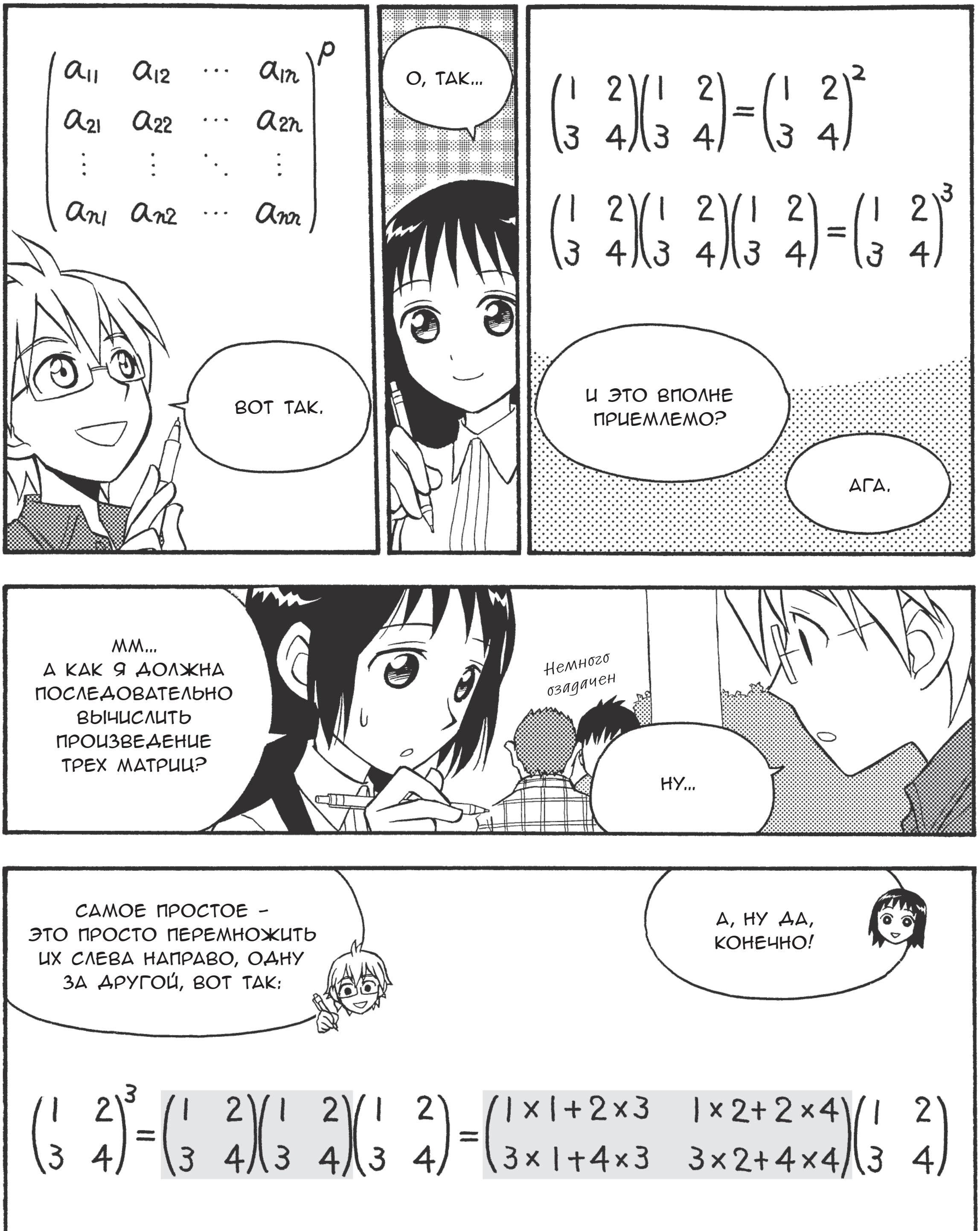


Произведение множителей 3×2 и 2×2	$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{pmatrix}$ то же самое, что $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$, что то же самое, что $\begin{cases}1x_1+2x_2\\3x_1+4x_2\\5x_1+6x_2\end{cases}$ $\begin{cases}1y_1+2y_2\\3y_1+4y_2\\5y_1+6y_2\end{cases}$ в той же матрице.
Произведение множителей 2×2 и 3×2	$\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}$ то же самое, что $\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$, что то же самое, что $\begin{cases}x_1\times 1+y_1\times 3+\boxed{?}\times 5\\x_2\times 1+y_2\times 3+\boxed{?}\times 5\end{cases}$ и $\begin{cases}x_1\times 2+y_1\times 4+\boxed{?}\times 6\\x_2\times 2+y_2\times 4+\boxed{?}\times 6\end{cases}$ в той же матрице.

И здесь мы натолкнулись на проблему:
не существует элементов, соотносящихся с этими позициями!

ЕЩЕ ОДИН МОМЕНТ. ДЛЯ УКАЗАНИЯ ПОВТОРНОГО УМНОЖЕНИЯ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ ВПОЛНЕ ДОПУСТИМО ИСПОЛЬЗОВАТЬ ЗНАК ПОКАЗАТЕЛЯ СТЕПЕНИ.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}}_{p\ \text{множителей}}$$



$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^p$
Вот так.
О, так...
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^3$
И это вполне приемлемо?
Ага.
Мм... А как я должна последовательно вычислить произведение трех матриц?
Немного озадачен
Ну...
Самое простое – это просто перемножить их слева направо, одну за другой, вот так:
А, ну да, конечно!
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+2\times3 & 1\times2+2\times4 \\ 3\times1+4\times3 & 3\times2+4\times4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

3.3. Специальные матрицы

3.3.1. Нулевые матрицы

Нулевая матрица – это матрица, где все элементы являются нулями.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.3.2. Транспонированные матрицы

Что такое транспонированная матрица, проще всего можно объяснить на примере.

Если мы транспонируем матрицу 3×2 $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$, мы получаем матрицу 2×3 $\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}$.

Как видно из примера, при транспонировании в матрице меняются местами столбцы и строки.

То есть при транспонировании матрицы $n\times m$ $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$ получаем $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$.

Самый распространенный способ обозначить транспонирование матрицы – это добавить символ T в правый верхний угол матрицы:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}^T.$$

3.3.3. Симметричные матрицы

Симметричные матрицы – это квадратные матрицы, симметричные относительно главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 10 \\ 7 & 9 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Благодаря этой серой черте симметричная матрица всегда равна своей транспозиции.

3.3.4. Верхние треугольные и нижние треугольные матрицы

Треугольные матрицы – это квадратные матрицы, у которых нулевые элементы либо над главной диагональю, либо под ней.
Это верхняя треугольная матрица, так как все элементы ниже главной диагонали равны нулю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Это – нижняя треугольная матрица, так как у нее все элементы выше главной диагонали равны нулю:

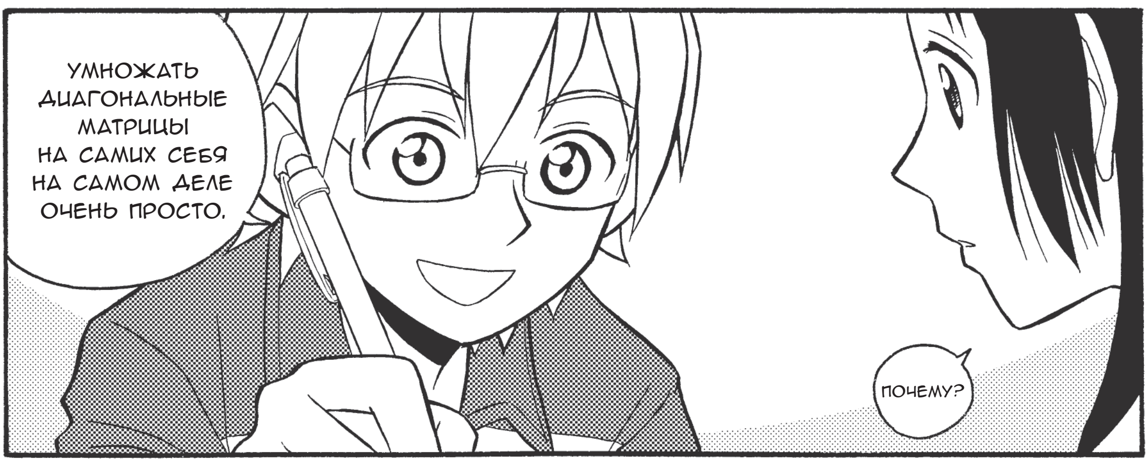
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

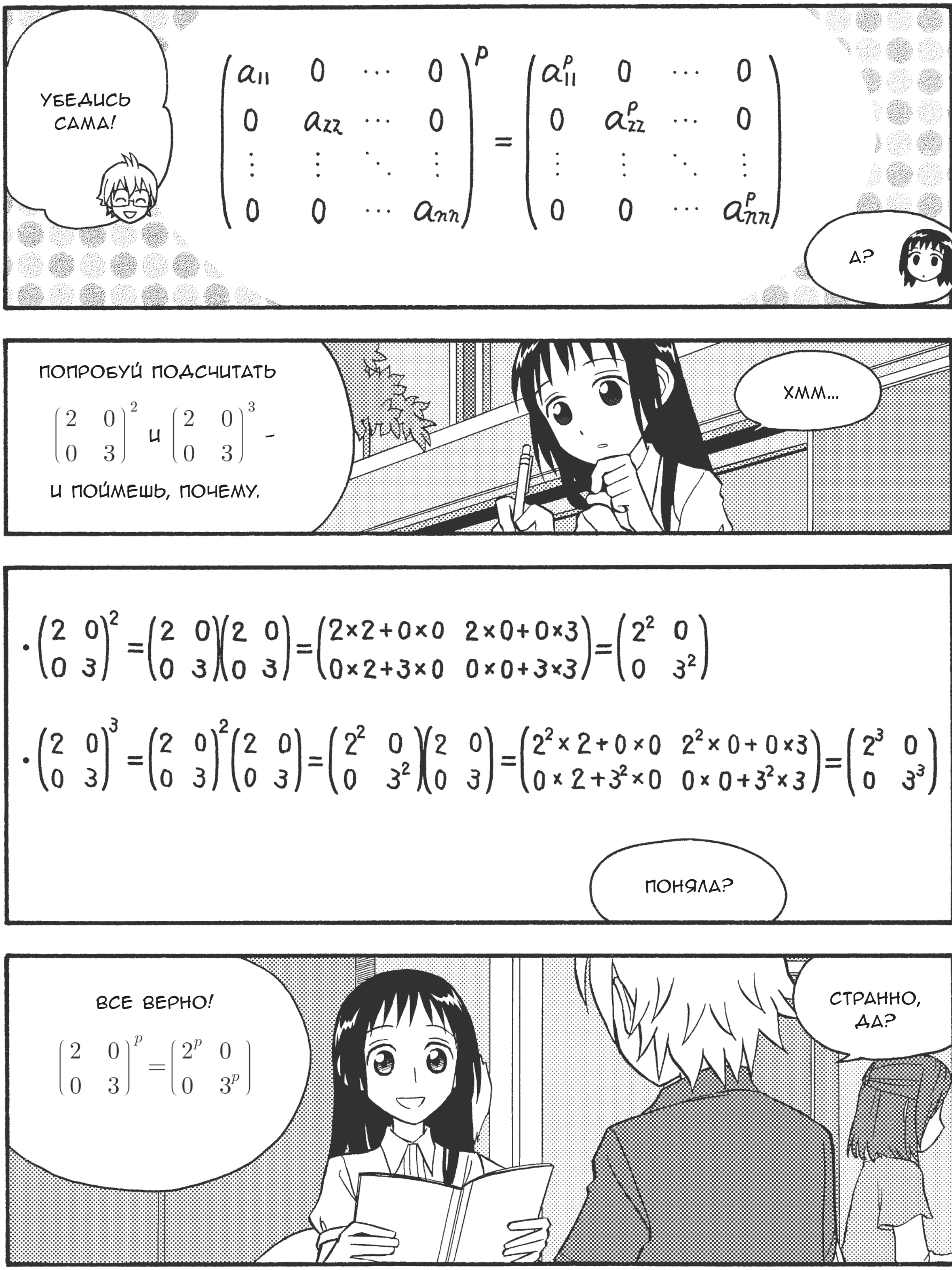
3.3.5. Диагональные матрицы

Диагональная матрица – это квадратная матрица, у которой равны нулю все элементы, не принадлежащие главной диагонали.
Для примера это – диагональная матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Заметь, эту матрицу можно также записать так: diag(1, 2, 3, 4).

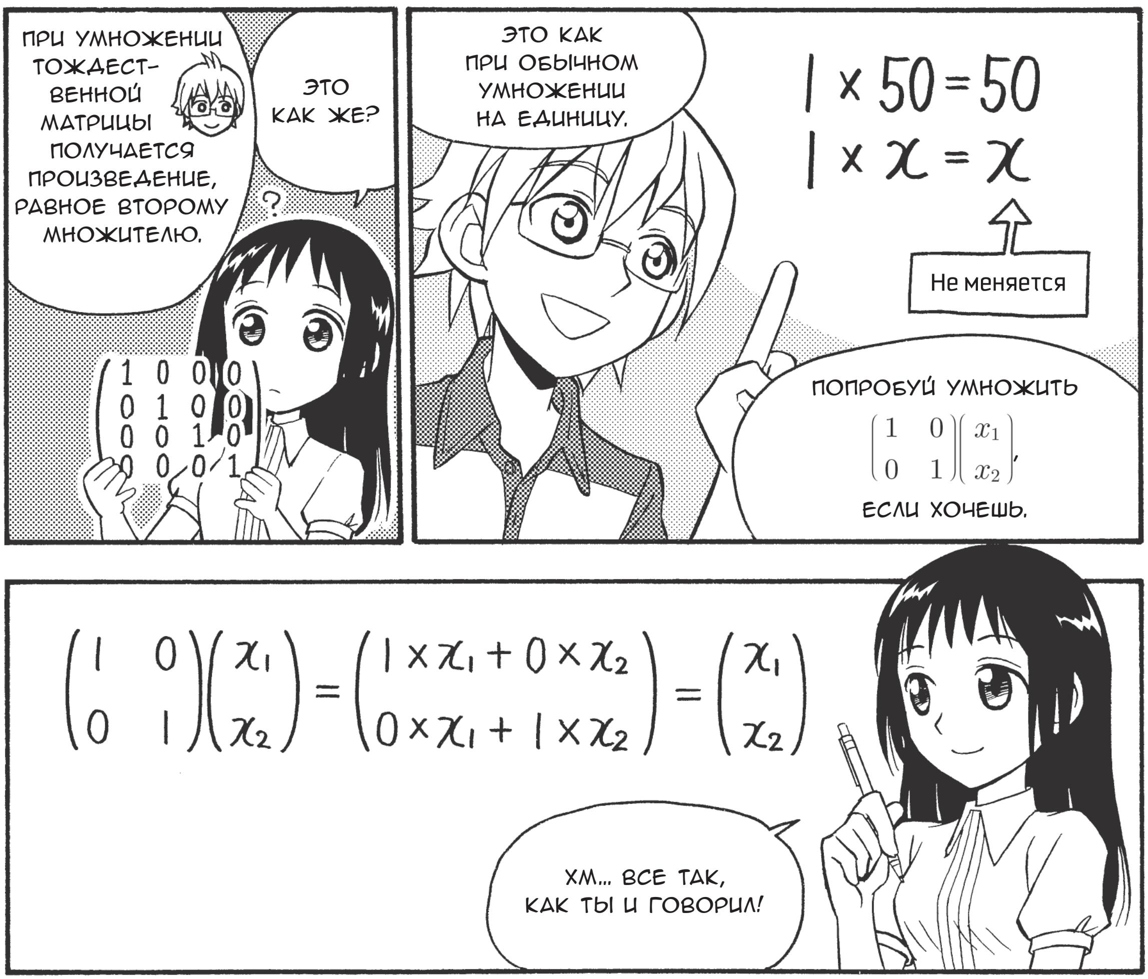



Убедись сама!
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_{11}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^p \end{pmatrix}$$
Да?
Попробуй подсчитать $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2$ и $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^3$ – и поймешь, почему.
Хмм...
$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times2+0\times0 & 2\times0+0\times3 \\ 0\times2+3\times0 & 0\times0+3\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2\times2+0\times0 & 2^2\times0+0\times3 \\ 0\times2+3^2\times0 & 0\times0+3^2\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$
Поняла?
Все верно!
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} 2^p & 0 \\ 0 & 3^p \end{pmatrix}$$
Странно, да?

3.3.6. Тождественные матрицы

Тождественные матрицы, по сути дела, – это diag(1, 1, 1, ..., 1). Другими словами, это квадратные матрицы с n строками, в которых все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы – нули.
Например, тождественная матрица с $n = 4$ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

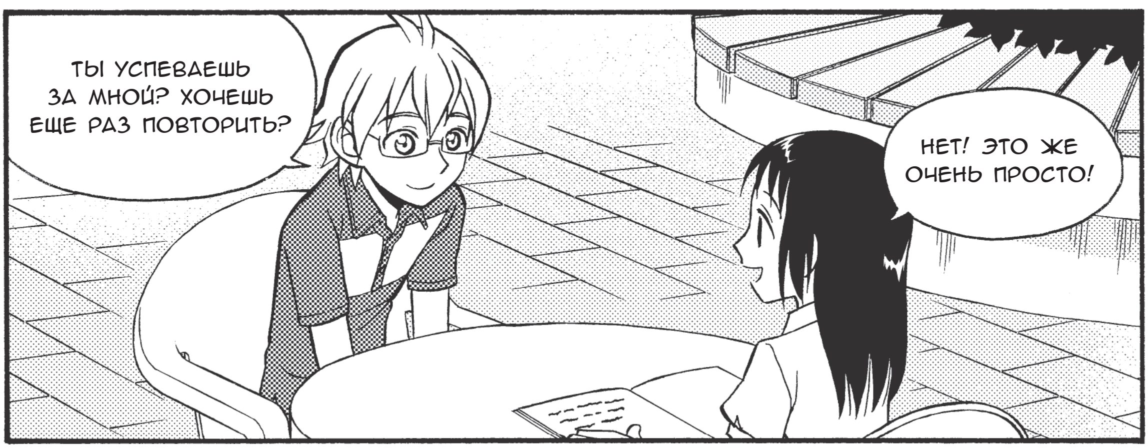


$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times x_1 + 0\times x_2 + \cdots + 0\times x_n \\ 0\times x_1 + 1\times x_2 + \cdots + 0\times x_n \\ \vdots \\ 0\times x_1 + 0\times x_2 + \cdots + 1\times x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times x_{11} + 0\times x_{12} & 1\times x_{21} + 0\times x_{22} & \cdots & 1\times x_{n1} + 0\times x_{n2} \\ 0\times x_{11} + 1\times x_{12} & 0\times x_{21} + 1\times x_{22} & \cdots & 0\times x_{n1} + 1\times x_{n2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \end{pmatrix}$$

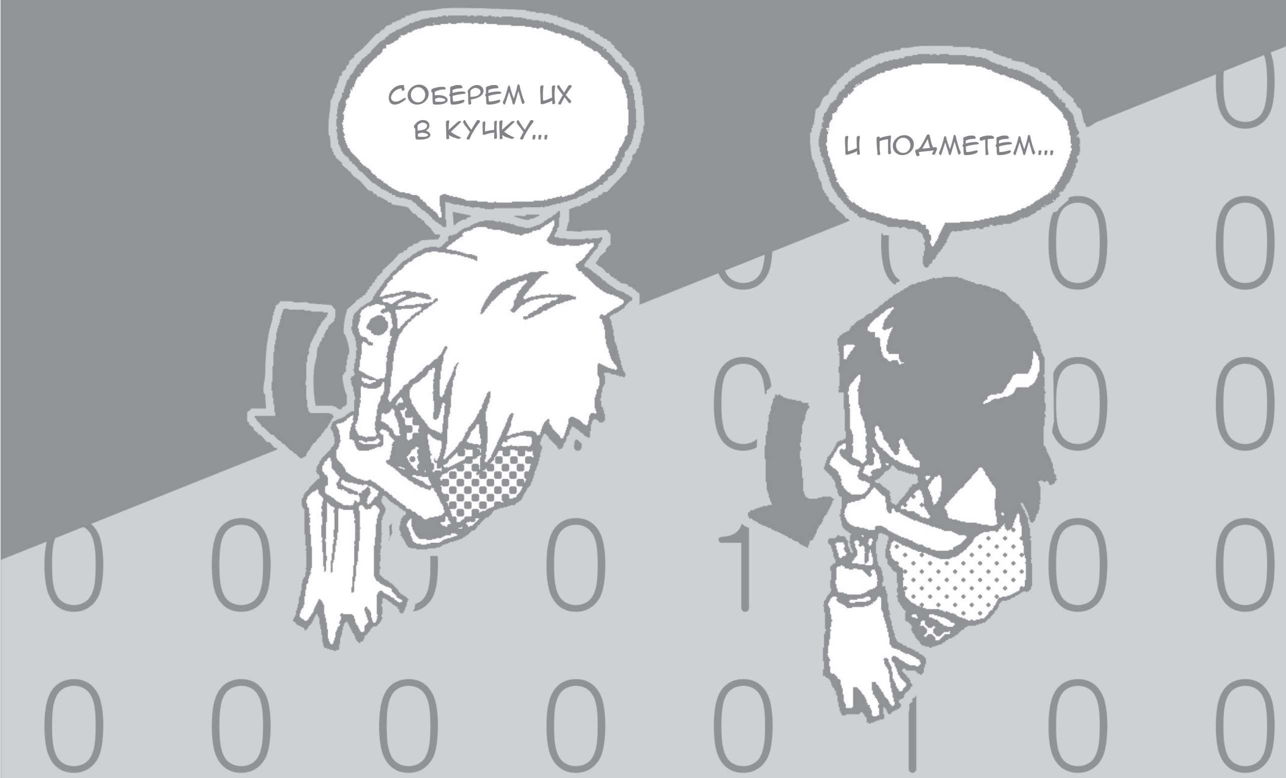
$$\cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}\times 1 + x_{12}\times 0 & x_{11}\times 0 + x_{12}\times 1 \\ x_{21}\times 1 + x_{22}\times 0 & x_{21}\times 0 + x_{12}\times 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1}\times 1 + x_{n2}\times 0 & x_{n1}\times 0 + x_{n2}\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix}$$




Давай прервемся ненадолго. Нам еще предстоит познакомиться с обратными матрицами, а они сложнее.
Меня устраивает.
А!
Еще раз спасибо за обед. Я понятия не имел, что ты так отлично готовишь.
Нет проблем!
Завтра могу приготовить тебе еще.
Нет, нет, я не это имел в виду...
Не переживай. Самое приятное в готовке - это видеть, что другим нравится твоя стряпня.
Мне это в радость.
С-спасибо...
Что ты говоришь? Готова продолжить с матрицами?
Готова.

ГЛАВА 4

И СНОВА МАТРИЦЫ



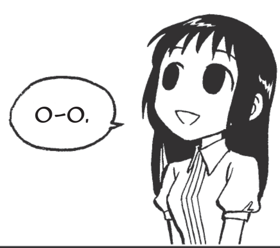
4.1. ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

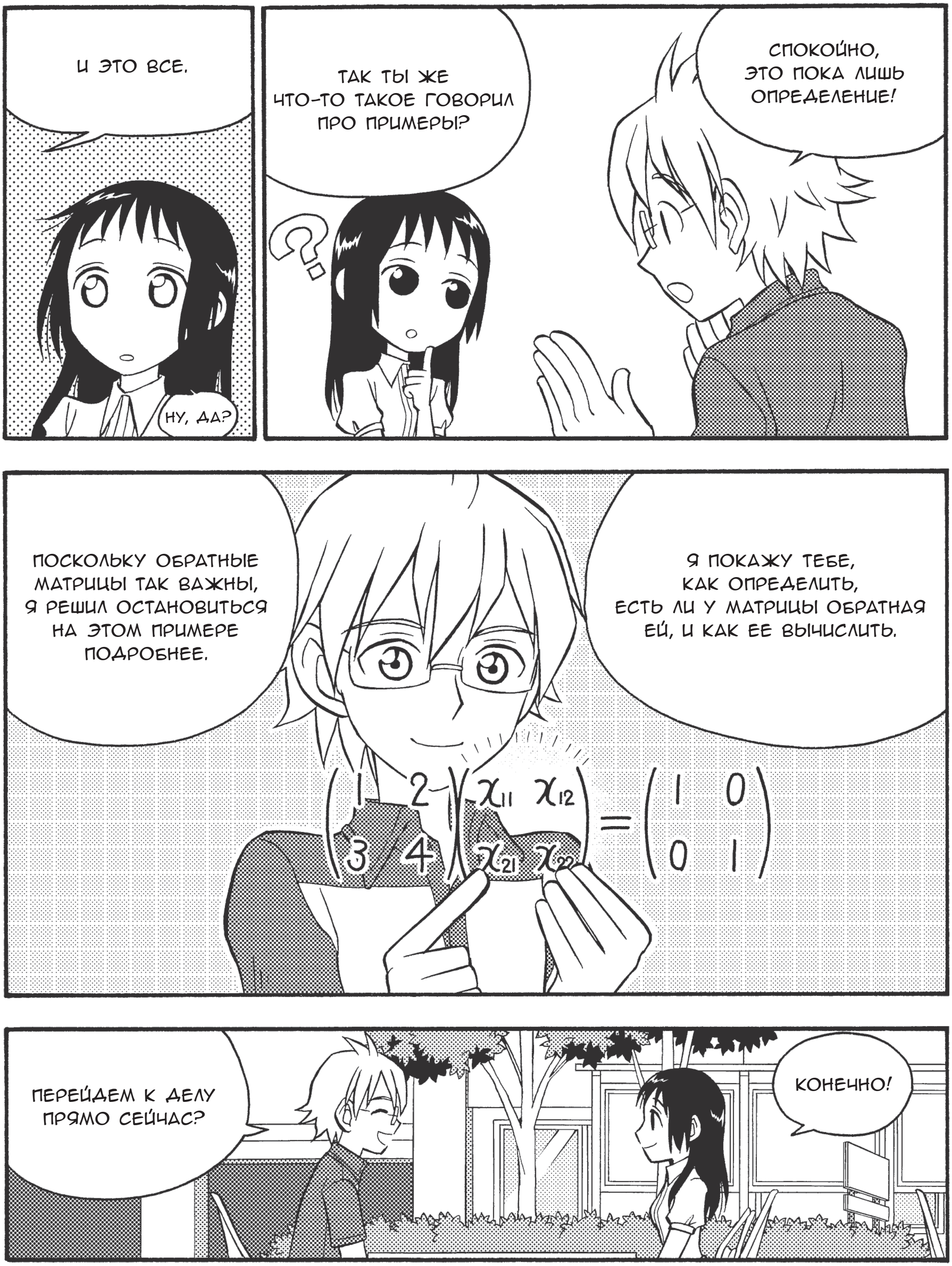
Обратные матрицы

Если произведение двух квадратных матриц равно единичной матрице, то две первые матрицы обратны друг другу.

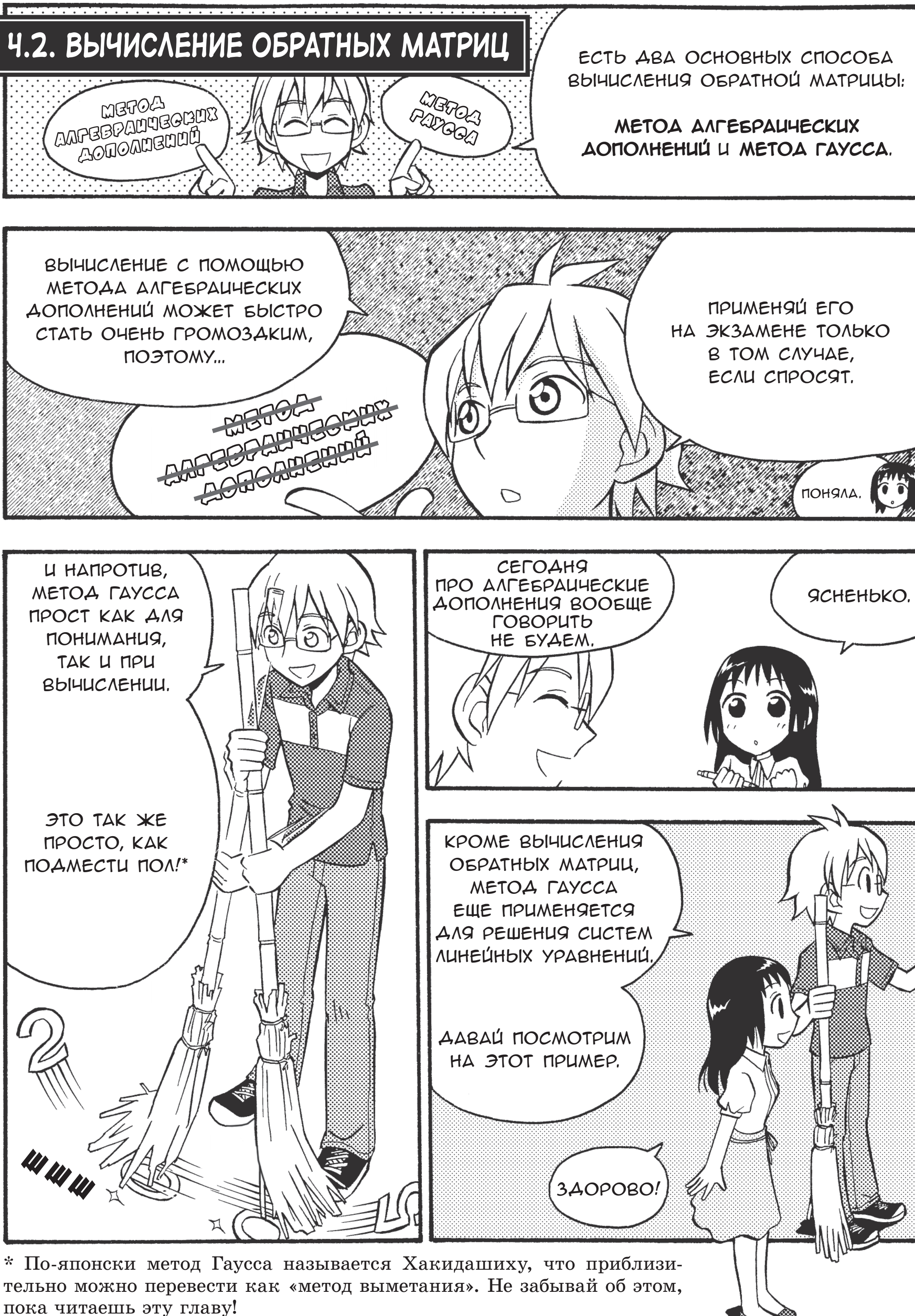
Это значит, что матрица $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ является обратной матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, если

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$




И ЭТО ВСЕ.
НУ, ДА?
ТАК ТЫ ЖЕ ЧТО-ТО ТАКОЕ ГОВОРИЛ ПРО ПРИМЕРЫ?
СПОКОЙНО, ЭТО ПОКА ЛИШЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ!
ПОСКОЛЬКУ ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ ТАК ВАЖНЫ, Я РЕШИЛ ОСТАНОВИТЬСЯ НА ЭТОМ ПРИМЕРЕ ПОДРОБНЕЕ.
Я ПОКАЖУ ТЕБЕ, КАК ОПРЕДЕЛИТЬ, ЕСТЬ ЛИ У МАТРИЦЫ ОБРАТНАЯ ЕЙ, И КАК ЕЕ ВЫЧИСЛИТЬ.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
ПЕРЕЙДЕМ К ДЕЛУ ПРЯМО СЕЙЧАС?
КОНЕЧНО!

4.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ



* По-японски метод Гаусса называется Хакидашиху, что приблизительно можно перевести как «метод выметания». Не забывай об этом, пока читаешь эту главу!

Задача

Решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 1 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Решение

Общепринятый метод	Метод с использованием матриц	Метод Гаусса
$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 1 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ Сначала умножаем верхнее уравнение на 2.	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 2 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ Вычитаем нижнее уравнение из верхнего.	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 5x_1 + 0x_2 = 2 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ Умножаем нижнее уравнение на 5.	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 5x_1 + 0x_2 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 = 0 \end{cases}$ Вычитаем верхнее уравнение из нижнего.	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 5 & 10 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 5x_1 + 0x_2 = 2 \\ 0x_1 + 10x_2 = -2 \end{cases}$ Делим верхнее уравнение на 5, а нижнее на 10.	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 = \frac{2}{5} \\ 0x_1 + 1x_2 = -\frac{1}{5} \end{cases}$ И готово!	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Задача

Найти матрицу, обратную матрице 2×2 $\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$.

Мы хотим найти матрицу, обратную матрице

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}.$$

↓

Нам надо найти матрицу $\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$, которая удовлетворяет условиям $\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

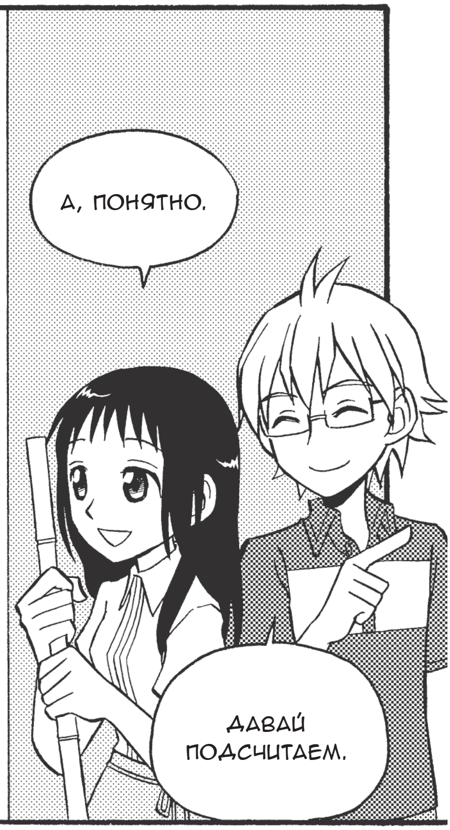
↓

Или $\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\end{pmatrix}$, которые удовлетворяют условиям

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{cases}.$$

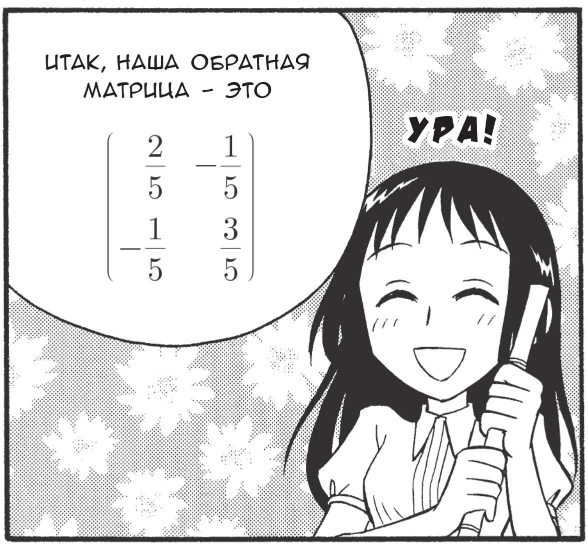
↓

Надо решить систему линейных уравнений $\begin{cases}3x_{11}+1x_{21}=1\\1x_{11}+2x_{21}=0\end{cases}$ и $\begin{cases}3x_{12}+1x_{22}=0\\1x_{12}+2x_{22}=1\end{cases}$.



Решение

Общепринятый метод	Метод с использованием матриц	Метод Гаусса
$\begin{cases}3x_{11}+1x_{21}=1\\1x_{11}+2x_{21}=0\end{cases}$ $\begin{cases}3x_{12}+1x_{22}=0\\1x_{12}+2x_{22}=1\end{cases}$ Умножаем верхнее уравнение на 2.	$\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&1&1&0\\1&2&0&1\end{pmatrix}$
$\begin{cases}6x_{11}+2x_{21}=2\\1x_{11}+2x_{21}=0\end{cases}$ $\begin{cases}6x_{12}+2x_{22}=0\\1x_{12}+2x_{22}=1\end{cases}$ Вычитаем нижнее уравнение из верхнего.	$\begin{pmatrix}6&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6&2&2&0\\1&2&0&1\end{pmatrix}$
$\begin{cases}5x_{11}+0x_{21}=2\\1x_{11}+2x_{21}=0\end{cases}$ $\begin{cases}5x_{12}+0x_{22}=-1\\1x_{12}+2x_{22}=1\end{cases}$ Умножаем нижнее уравнение на 5.	$\begin{pmatrix}5&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&0&2&-1\\1&2&0&1\end{pmatrix}$
$\begin{cases}5x_{11}+0x_{21}=2\\5x_{11}+10x_{21}=0\end{cases}$ $\begin{cases}5x_{12}+0x_{22}=-1\\5x_{12}+10x_{22}=5\end{cases}$ Вычитаем верхнее уравнение из нижнего.	$\begin{pmatrix}5&0\\5&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\0&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&0&2&-1\\5&10&0&5\end{pmatrix}$
$\begin{cases}5x_{11}+0x_{21}=2\\0x_{11}+10x_{21}=-2\end{cases}$ $\begin{cases}5x_{12}+0x_{22}=-1\\0x_{12}+10x_{22}=6\end{cases}$ Делим верхнее уравнение на 5, а нижнее на 10.	$\begin{pmatrix}5&0\\0&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&0&2&-1\\0&10&-2&6\end{pmatrix}$
$\begin{cases}1x_{11}+0x_{21}=\frac{2}{5}\\0x_{11}+1x_{21}=-\frac{1}{5}\end{cases}$ $\begin{cases}1x_{12}+0x_{22}=-\frac{1}{5}\\0x_{12}+1x_{22}=\frac{3}{5}\end{cases}$ Получаем нашу обратную матрицу.	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\0&1&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$



Произведение изначальной и обратной матриц равно

$$\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times\frac{2}{5}+1\times\left(-\frac{1}{5}\right) & 3\times\left(-\frac{1}{5}\right)+1\times\frac{3}{5}\\ 1\times\frac{2}{5}+2\times\left(-\frac{1}{5}\right) & 1\times\left(-\frac{1}{5}\right)+2\times\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Произведение обратной и изначальной матриц равно

$$\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\times3+\left(-\frac{1}{5}\right)\times1 & \frac{2}{5}\times1+\left(-\frac{1}{5}\right)\times2\\ \left(-\frac{1}{5}\right)\times3+\frac{3}{5}\times1 & \left(-\frac{1}{5}\right)\times1+\frac{3}{5}\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

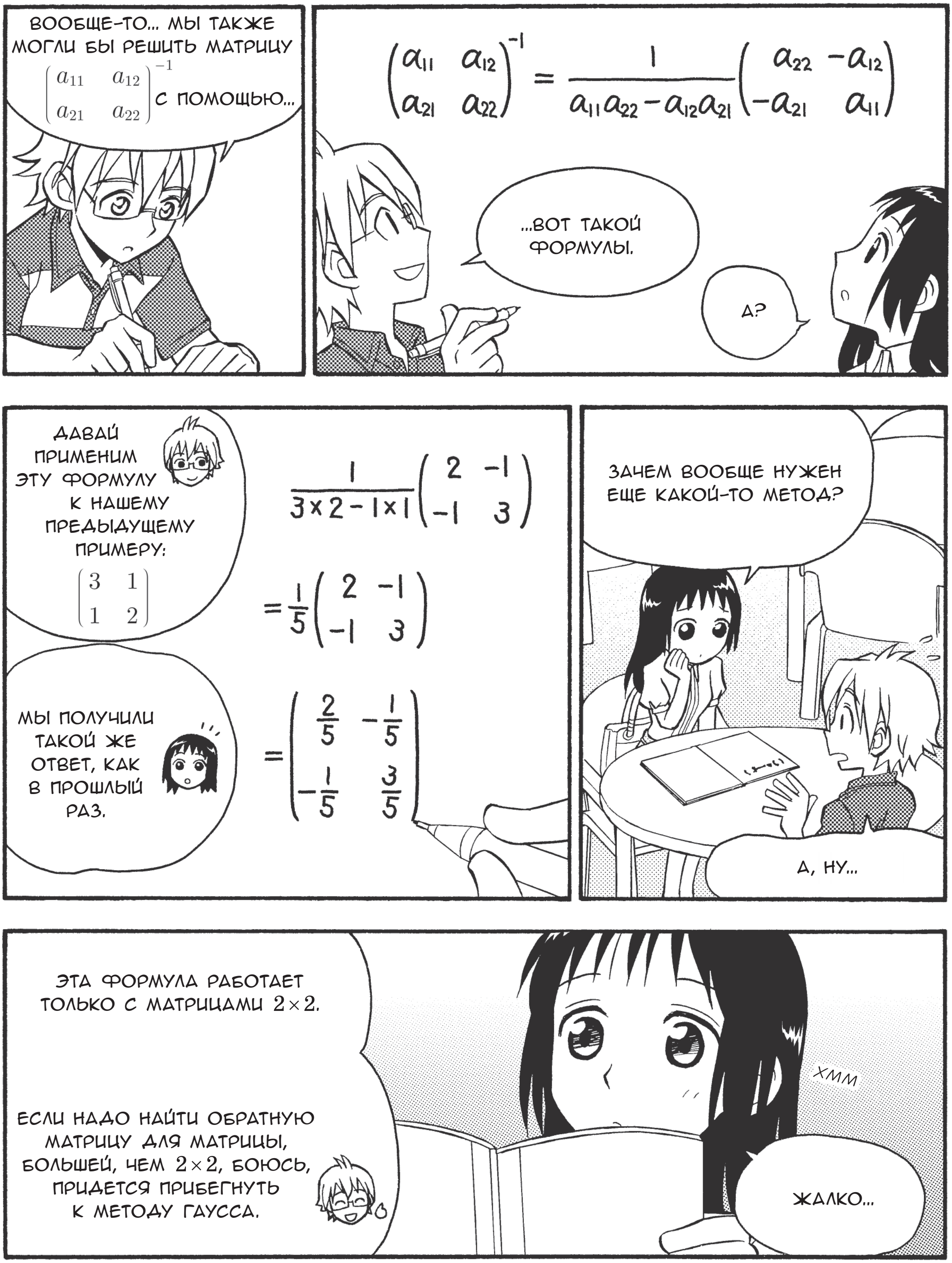
СИМВОЛ, КОТОРЫМ ОБОЗНАЧАЮТСЯ ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ, ТАКОЙ ЖЕ, КАК ДЛЯ ВСЕГО ОБРАТНОГО В МАТЕМАТИКЕ, ТО ЕСТЬ...

МАТРИЦА, ОБРАТНАЯ ВОТ ЭТОЙ

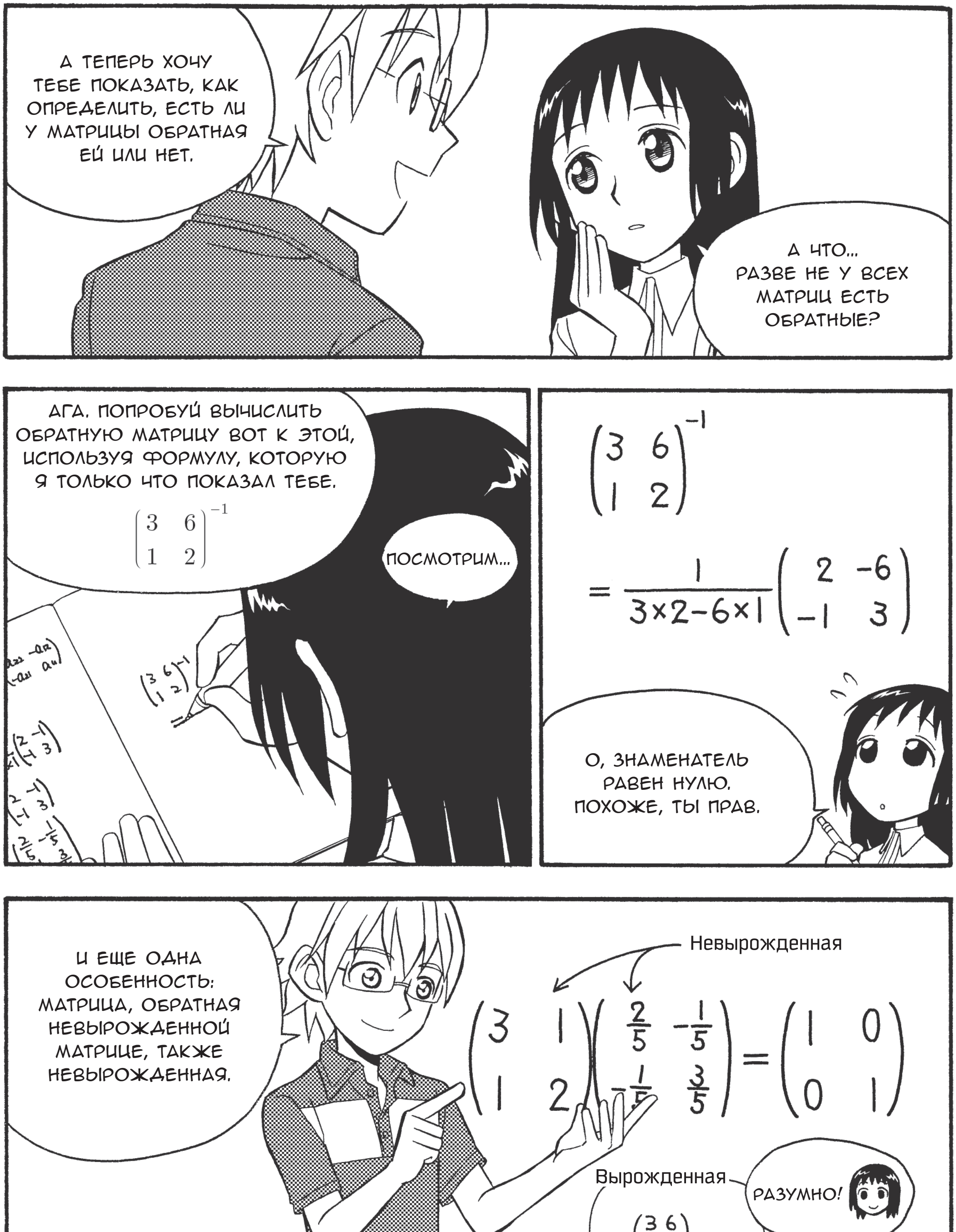
$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

ЗАПИСЫВАЕТСЯ ТАК:

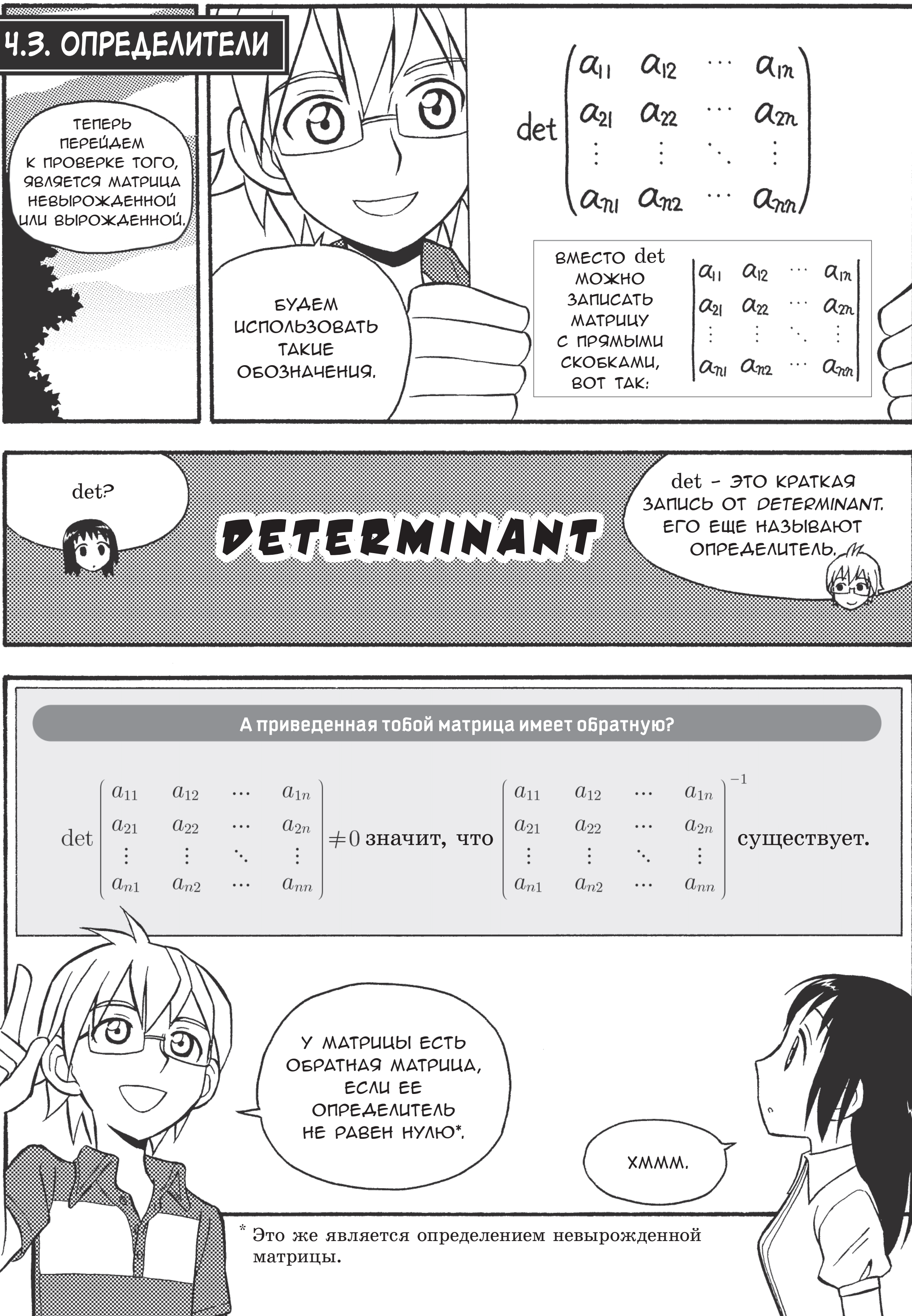
$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}^{-1}$$



ВООБЩЕ-ТО... МЫ ТАКЖЕ МОГЛИ БЫ РЕШИТЬ МАТРИЦУ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}$ С ПОМОЩЬЮ...
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$
...ВОТ ТАКОЙ ФОРМУЛЫ.
А?
ДАВАЙ ПРИМЕНИМ ЭТУ ФОРМУЛУ К НАШЕМУ ПРЕДЫДУЩЕМУ ПРИМЕРУ: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\dfrac{1}{3 \times 2 - 1 \times 1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
$= \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$
МЫ ПОЛУЧИЛИ ТАКОЙ ЖЕ ОТВЕТ, КАК В ПРОШЛЫЙ РАЗ.
ЗАЧЕМ ВООБЩЕ НУЖЕН ЕЩЕ КАКОЙ-ТО МЕТОД?
А, НУ...
ЭТА ФОРМУЛА РАБОТАЕТ ТОЛЬКО С МАТРИЦАМИ 2×2.
ЕСЛИ НАДО НАЙТИ ОБРАТНУЮ МАТРИЦУ ДЛЯ МАТРИЦЫ, БОЛЬШЕЙ, ЧЕМ 2×2, БОЮСЬ, ПРИДЕТСЯ ПРИБЕГНУТЬ К МЕТОДУ ГАУССА.
ХММ
ЖАЛКО...

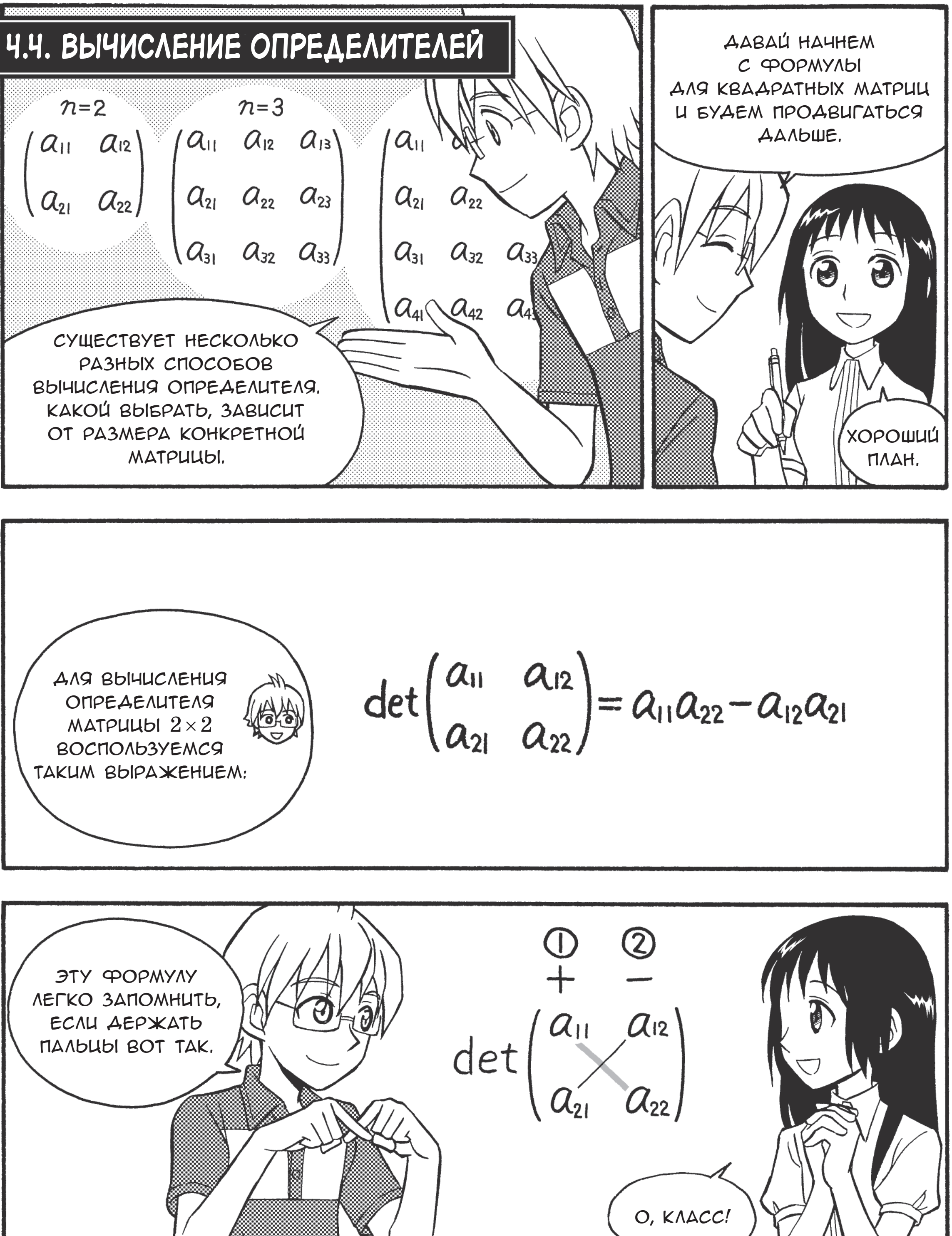

А теперь хочу тебе показать, как определить, есть ли у матрицы обратная ей или нет.
А что... разве не у всех матриц есть обратные?
Ага. Попробуй вычислить обратную матрицу вот к этой, используя формулу, которую я только что показал тебе.
$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$
Посмотрим...
$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3\times2-6\times1}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
О, знаменатель равен нулю. Похоже, ты прав.
И еще одна особенность: матрица, обратная невырожденной матрице, также невырожденная.
Невырожденная
$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Вырожденная
$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
Разумно!

4.3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ



* Это же является определением невырожденной матрицы.

4.4. Вычисление определителей



Давай посмотрим, есть ли у матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ обратная ей или нет.

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3\times 2 - 0\times 0 = 6$$

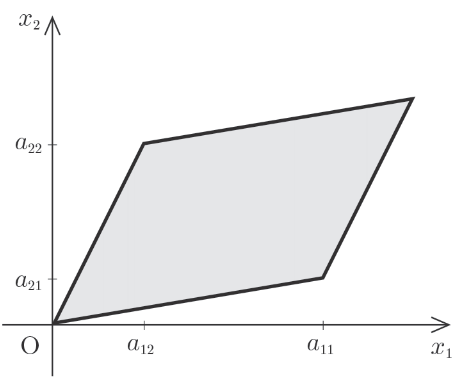
Да, есть, так как $\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$.

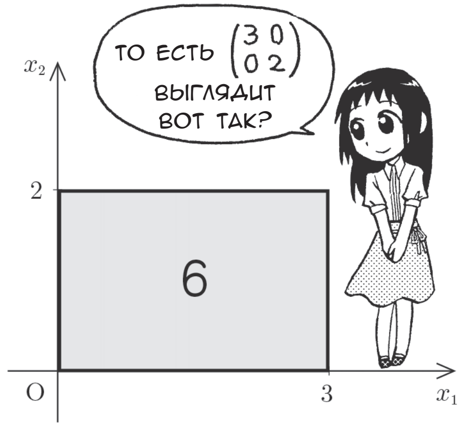
Кстати, площадь параллелограмма, ограниченного четырьмя вот этими точками:

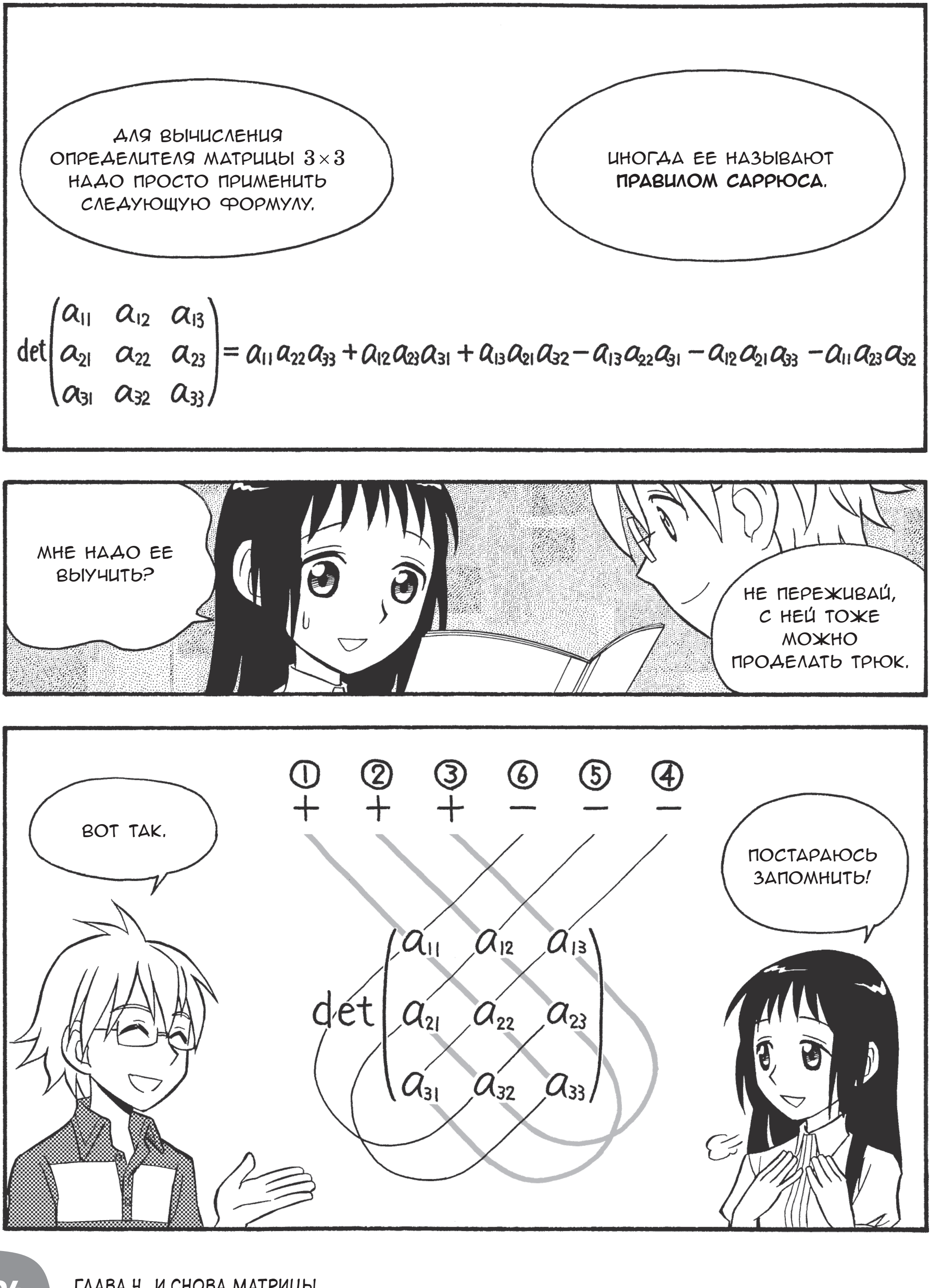
- начало координат O;
- точка (a_{11}, a_{21});
- точка (a_{12}, a_{22});
- точка $(a_{11}+a_{12}, a_{21}+a_{22})$, –

совпадает по значению с абсолютным значением определителя:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$






Для вычисления определителя матрицы 3×3 надо просто применить следующую формулу.
Иногда ее называют **правилом Саррюса.**
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$
Мне надо ее выучить?
Не переживай, с ней тоже можно проделать трюк.
Вот так.
① + ② + ③ + ⑥ − ⑤ − ④ −
$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
Постараюсь запомнить!

Давай посмотрим, имеет ли матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ обратную матрицу.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1\times1\times3+0\times(-1)\times(-2)+0\times1\times0-0\times1\times(-2)-0\times1\times3-1\times(-1)\times0$$
$$=3+0+0-0-0-0$$
$$=3$$

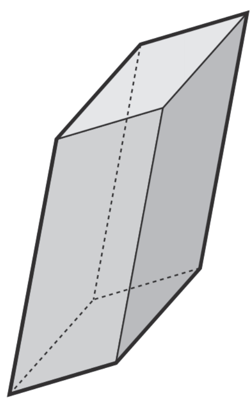
Да, у этой тоже есть обратная матрица! $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$

Объем параллелепипеда, ограниченного следующими восемью точками:

- начало координат O;
- точка (a_{11}, a_{21}, a_{31});
- точка (a_{12}, a_{22}, a_{32});
- точка (a_{13}, a_{23}, a_{33});
- точка $(a_{11}+a_{12}, a_{21}+a_{22}, a_{31}+a_{32})$;
- точка $(a_{11}+a_{13}, a_{21}+a_{23}, a_{31}+a_{33})$;
- точка $(a_{12}+a_{13}, a_{22}+a_{23}, a_{32}+a_{33})$;
- точка $(a_{11}+a_{12}+a_{13}, a_{21}+a_{22}+a_{23}, a_{31}+a_{32}+a_{33})$, –

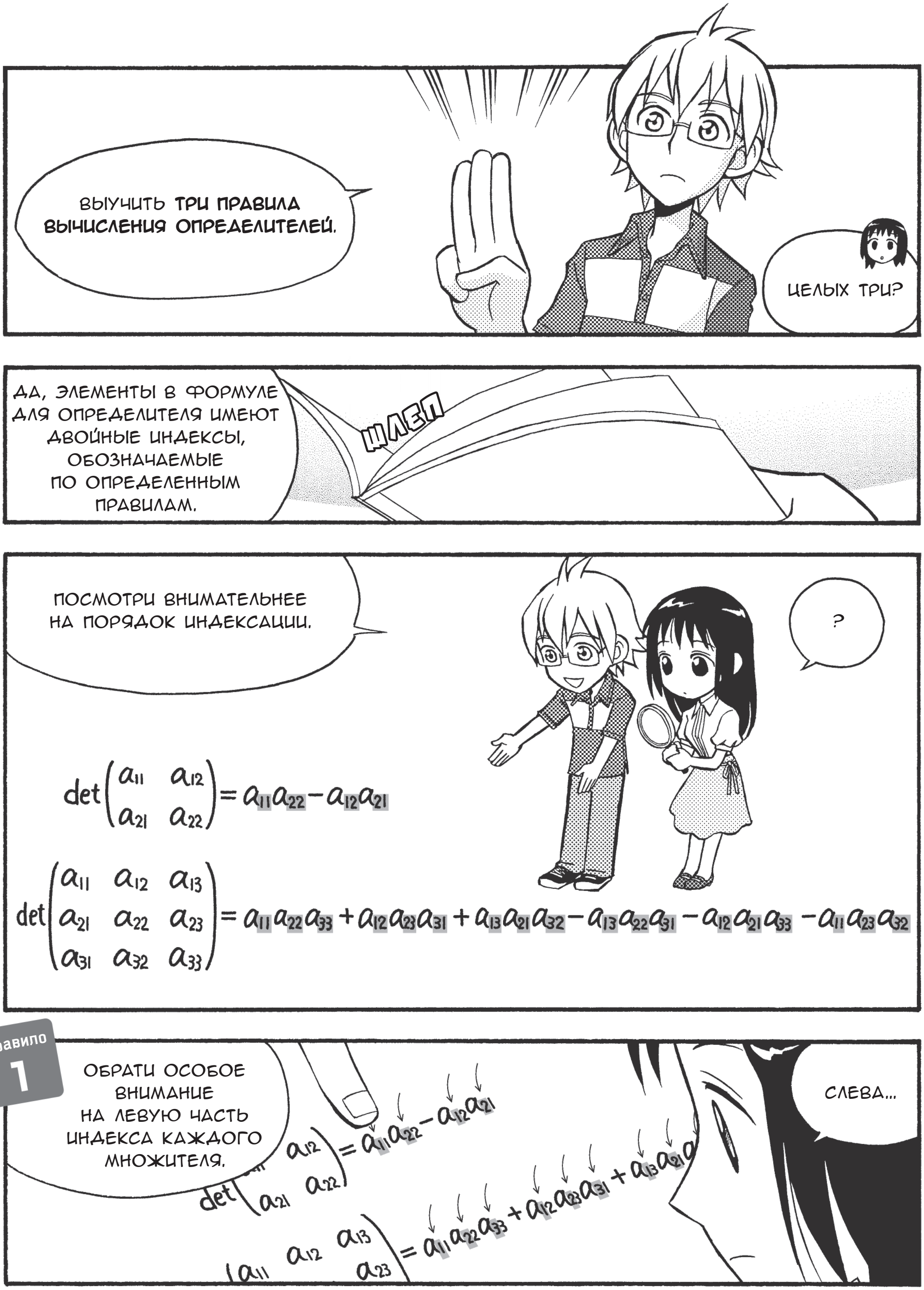
также совпадает с абсолютным значением определителя:

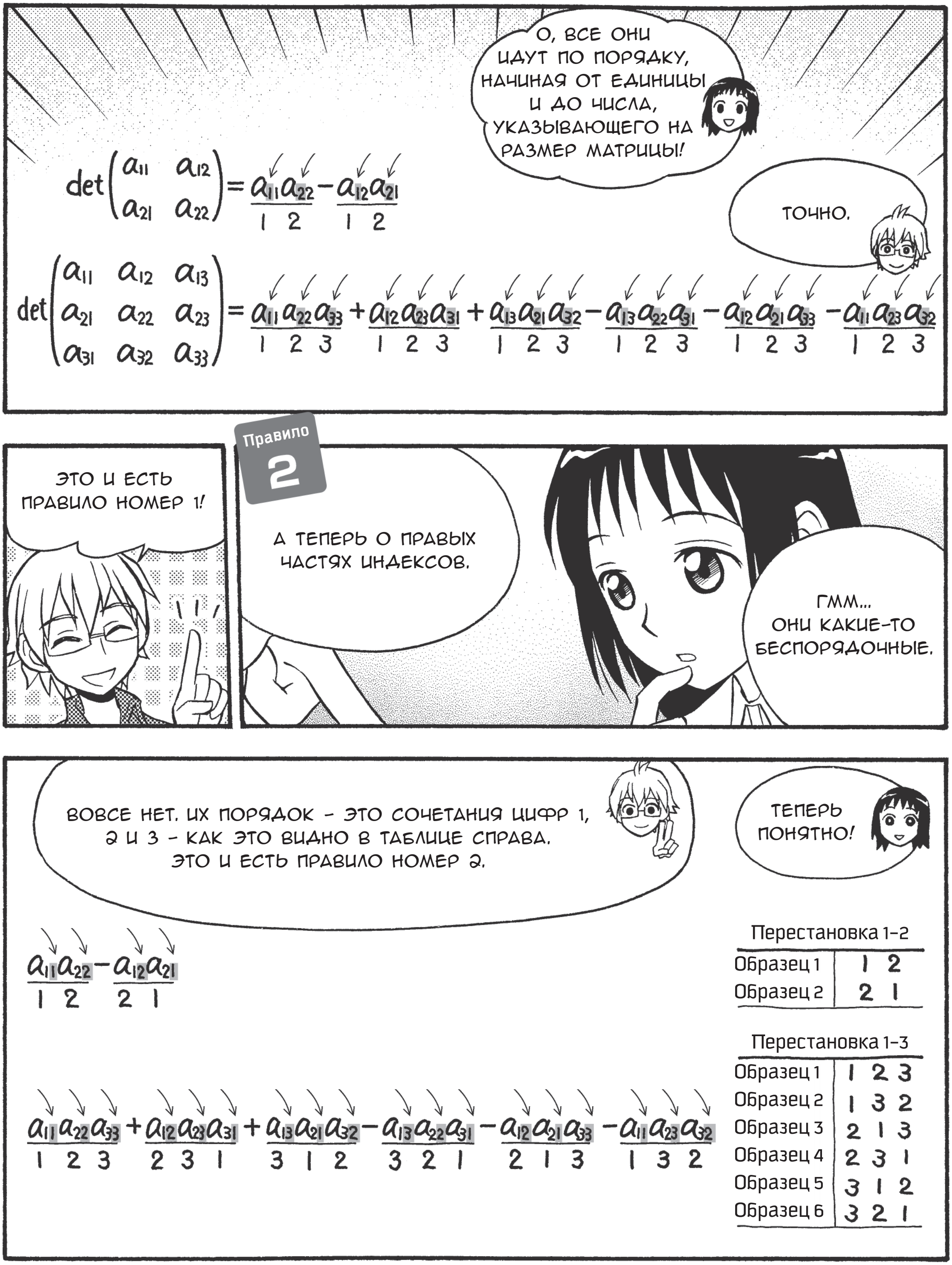
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{pmatrix}.$$



Каждая пара противоположных друг другу сторон параллелепипеда параллельна и имеет одинаковую площадь.


Дальше у нас идут матрицы 4×4, и я думаю...
a_{11} a_{12} a_{13} a_{14}
a_{21} a_{22} a_{23} a_{24}
a_{31} a_{32} a_{33} a_{34}
a_{41} a_{42} a_{43} a_{44}
Ага.
Хи-хи
Возможно, вот так?
Боюсь, что нет... Горькая правда состоит в том, что формулы вычисления определителей матриц размером 4×4 и больше очень сложные.
Нет!
И как же их вычислять?
?
Для этого надо...


ВЫУЧИТЬ **ТРИ ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.**
ЦЕЛЫХ ТРИ?
ДА, ЭЛЕМЕНТЫ В ФОРМУЛЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ИМЕЮТ ДВОЙНЫЕ ИНДЕКСЫ, ОБОЗНАЧАЕМЫЕ ПО ОПРЕДЕЛЕННЫМ ПРАВИЛАМ.
ШЛЕП
ПОСМОТРИ ВНИМАТЕЛЬНЕЕ НА ПОРЯДОК ИНДЕКСАЦИИ.
?
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$
Правило 1
ОБРАТИ ОСОБОЕ ВНИМАНИЕ НА ЛЕВУЮ ЧАСТЬ ИНДЕКСА КАЖДОГО МНОЖИТЕЛЯ.
СЛЕВА...



$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \underset{1\ 2}{\underline{a_{11}a_{22}}} - \underset{1\ 2}{\underline{a_{12}a_{21}}}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underset{1\ 2\ 3}{\underline{a_{11}a_{22}a_{33}}} + \underset{1\ 2\ 3}{\underline{a_{12}a_{23}a_{31}}} + \underset{1\ 2\ 3}{\underline{a_{13}a_{21}a_{32}}} - \underset{1\ 2\ 3}{\underline{a_{13}a_{22}a_{31}}} - \underset{1\ 2\ 3}{\underline{a_{12}a_{21}a_{33}}} - \underset{1\ 2\ 3}{\underline{a_{11}a_{23}a_{32}}}$$

$$\underset{1\ 2}{\underline{a_{11}a_{22}}} - \underset{2\ 1}{\underline{a_{12}a_{21}}}$$

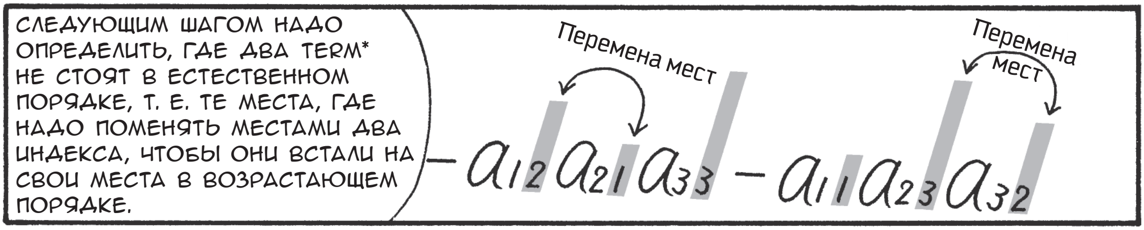
$$\underset{1\ 2\ 3}{\underline{a_{11}a_{22}a_{33}}} + \underset{2\ 3\ 1}{\underline{a_{12}a_{23}a_{31}}} + \underset{3\ 1\ 2}{\underline{a_{13}a_{21}a_{32}}} - \underset{3\ 2\ 1}{\underline{a_{13}a_{22}a_{31}}} - \underset{2\ 1\ 3}{\underline{a_{12}a_{21}a_{33}}} - \underset{1\ 3\ 2}{\underline{a_{11}a_{23}a_{32}}}$$

Перестановка 1–2

Образец 1	1 2
Образец 2	2 1

Перестановка 1–3

Образец 1	1 2 3
Образец 2	1 3 2
Образец 3	2 1 3
Образец 4	2 3 1
Образец 5	3 1 2
Образец 6	3 2 1



* term – элемент матрицы с двойным индексом.

	Сочетание 1–2	Соответствующий term в определителе	Перестановки
Образец 1	1 2	$a_{11}a_{22}$	
Образец 2	2 1	$a_{12}a_{21}$	2 и 1

	Сочетание 1–3	Соответствующий term в определителе	Перестановки		
Образец 1	1 2 3	$a_{11}a_{22}a_{33}$			
Образец 2	1 3 2	$a_{11}a_{23}a_{32}$			3 и 2
Образец 3	2 1 3	$a_{12}a_{21}a_{33}$	2 и 1		
Образец 4	2 3 1	$a_{12}a_{23}a_{31}$	2 и 1	3 и 1	
Образец 5	3 1 2	$a_{13}a_{21}a_{32}$		3 и 1	3 и 2
Образец 6	3 2 1	$a_{13}a_{22}a_{31}$	2 и 1	3 и 1	3 и 2

	Сочетание 1–2	Соответствующий term в определителе	Перестановки	Число перестановок	Знак
Образец 1	1 2	$a_{11}a_{22}$		0	+
Образец 2	2 1	$a_{12}a_{21}$	2 и 1	1	−

	Сочетание 1–3	Соответствующий term в определителе	Перестановки			Число перестановок	Знак
Образец 1	1 2 3	$a_{11}a_{22}a_{33}$				0	+
Образец 2	1 3 2	$a_{11}a_{23}a_{32}$			3 и 2	1	−
Образец 3	2 1 3	$a_{12}a_{21}a_{33}$	2 и 1			1	−
Образец 4	2 3 1	$a_{12}a_{23}a_{31}$	2 и 1	3 и 1		2	+
Образец 5	3 1 2	$a_{13}a_{21}a_{32}$		3 и 1	3 и 2	2	+
Образец 6	3 2 1	$a_{13}a_{22}a_{31}$	2 и 1	3 и 1	3 и 2	3	−

ВОТ ТАК.

ХММ...

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Соответствующий term в определителе	Знак
$a_{11}a_{22}$	+
$a_{12}a_{21}$	−

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Соответствующий term в определителе	Знак
$a_{11}a_{22}a_{33}$	+
$a_{11}a_{23}a_{32}$	−
$a_{12}a_{21}a_{33}$	−
$a_{12}a_{23}a_{31}$	+
$a_{13}a_{21}a_{32}$	+
$a_{13}a_{22}a_{31}$	−

УХ, ТЫ! ОНИ ОДИНАКОВЫЕ!

ТОЧНО. И ЭТО – ТРЕТЬЕ ПРАВИЛО.

	Сочетание 1–4				Соответствующий term в определителе	Перестановки						Число перестановок	Знак
Образец 1	1	2	3	4	$a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}$							0	+
Образец 2	1	2	4	3	$a_{11}\,a_{22}\,a_{34}\,a_{43}$						4 и 3	1	−
Образец 3	1	3	2	4	$a_{11}\,a_{23}\,a_{32}\,a_{44}$			3 и 2				1	−
Образец 4	1	3	4	2	$a_{11}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{42}$			3 и 2		4 и 2		2	+
Образец 5	1	4	2	3	$a_{11}\,a_{24}\,a_{32}\,a_{43}$					4 и 2	4 и 3	2	+
Образец 6	1	4	3	2	$a_{11}\,a_{24}\,a_{33}\,a_{42}$			3 и 2		4 и 2	4 и 3	3	−
Образец 7	2	1	3	4	$a_{12}\,a_{21}\,a_{33}\,a_{44}$	2 и 1						1	−
Образец 8	2	1	4	3	$a_{12}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{43}$	2 и 1					4 и 3	2	+
Образец 9	2	3	1	4	$a_{12}\,a_{23}\,a_{31}\,a_{44}$	2 и 1	3 и 1					2	+
Образец 10	2	3	4	1	$a_{12}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{41}$	2 и 1	3 и 1		4 и 1			3	−
Образец 11	2	4	1	3	$a_{12}\,a_{24}\,a_{31}\,a_{43}$	2 и 1			4 и 1		4 и 3	3	−
Образец 12	2	4	3	1	$a_{12}\,a_{24}\,a_{33}\,a_{41}$	2 и 1	3 и 1		4 и 1		4 и 3	4	+
Образец 13	3	1	2	4	$a_{13}\,a_{21}\,a_{32}\,a_{44}$		3 и 1	3 и 2				2	+
Образец 14	3	1	4	2	$a_{13}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{42}$		3 и 1	3 и 2		4 и 2		3	−
Образец 15	3	2	1	4	$a_{13}\,a_{22}\,a_{31}\,a_{44}$	2 и 1	3 и 1	3 и 2				3	−
Образец 16	3	2	4	1	$a_{13}\,a_{22}\,a_{34}\,a_{41}$	2 и 1	3 и 1	3 и 2	4 и 1			4	+
Образец 17	3	4	1	2	$a_{13}\,a_{24}\,a_{31}\,a_{42}$		3 и 1	3 и 2	4 и 1	4 и 2		4	+
Образец 18	3	4	2	1	$a_{13}\,a_{24}\,a_{32}\,a_{41}$	2 и 1	3 и 1	3 и 2	4 и 1	4 и 2		5	−
Образец 19	4	1	2	3	$a_{14}\,a_{21}\,a_{32}\,a_{43}$				4 и 1	4 и 2	4 и 3	3	−
Образец 20	4	1	3	2	$a_{14}\,a_{21}\,a_{33}\,a_{42}$			3 и 2	4 и 1	4 и 2	4 и 3	4	+
Образец 21	4	2	1	3	$a_{14}\,a_{22}\,a_{31}\,a_{43}$	2 и 1			4 и 1	4 и 2	4 и 3	4	+
Образец 22	4	2	3	1	$a_{14}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{41}$	2 и 1	3 и 1		4 и 1	4 и 2	4 и 3	5	−
Образец 23	4	3	1	2	$a_{14}\,a_{23}\,a_{31}\,a_{42}$		3 и 1	3 и 2	4 и 1	4 и 2	4 и 3	5	−
Образец 24	4	3	2	1	$a_{14}\,a_{23}\,a_{32}\,a_{41}$	2 и 1	3 и 1	3 и 2	4 и 1	4 и 2	4 и 3	6	+


Если это входит в зачет, то я...
Не переживай, большинство заданий озададчат тебя лишь матрицами 2×2 и 3×3.
ФУХ
Надеюсь...
Думаю, на сегодня хватит. Мы успели пройти кучу материала.
Спасибо, Рейхи. Ты лучше всех!
Время буквально пролетело...
......
Может, я могу...


Касса
Вам нужен пакет?
Черт! Время-то сколько уже...
БАХ!
БАЦ!
Там уже никого не должно быть в такой час.
БУХ!
真派花道

4.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ С ПОМОЩЬЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДОПОЛНЕНИЙ

Есть два практических способа вычисления обратных матриц, как уже было сказано на стр. 94:

- с помощью алгебраических дополнений;
- с помощью метода Гаусса.

Так как метод алгебраических дополнений подразумевает большое число громоздких вычислений, мы не стали использовать его в этой главе. Однако, поскольку в большинстве книг, похоже, этот метод используется, мы даем краткое объяснение.

Чтобы пользоваться этим методом, нужно сначала понять вот эти два понятия:

- (i, j)-минор, обозначаемый как M_{ij};
- (i, j)-алгебраическое дополнение, обозначаемое как Cij.

Сначала посмотрим на них.

4.5.1. M_{ij}

(i, j)-минор – это определитель, который получается, когда мы убираем строку i и столбец j из матрицы A размера $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Все миноры матрицы 3×3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ перечислены ниже.

M_{11} (1, 1) $\det\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 3\end{pmatrix}=3$	**M_{12} (1, 2)** $\det\begin{pmatrix}1 & -1\\-2 & 3\end{pmatrix}=1$	**M_{13} (1, 3)** $\det\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & 0\end{pmatrix}=2$
M_{21} (2, 1) $\det\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}=0$	**M_{22} (2, 2)** $\det\begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 3\end{pmatrix}=3$	**M_{23} (2, 3)** $\det\begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 0\end{pmatrix}=0$
M_{31} (3, 1) $\det\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}=0$	**M_{32} (3, 2)** $\det\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}=-1$	**M_{33} (3, 3)** $\det\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}=1$

4.5.2. C_{ij}

Если мы умножим $(i,\ j)$-минор на $(-1)^{i+j}$, то получим $(i,\ j)$-алгебраическое дополнение. Стандартный способ его записи – это C_{ij}. Таблица, приведенная ниже, содержит все алгебраические дополнения матрицы 3×3:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & -1\\-2 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

C_{11} (1, 1) $A_{11}=(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 3\end{pmatrix}$ $=1\times3$ $=3$	**C_{12} (1, 2)** $A_{12}=(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix}1 & -1\\-2 & 3\end{pmatrix}$ $=(-1)\times1$ $=-1$	**C_{13} (1, 3)** $A_{13}=(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & 0\end{pmatrix}$ $=1\times2$ $=2$
C_{21} (2, 1) $A_{21}=(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$ $=(-1)\times0$ $=0$	**C_{22} (2, 2)** $A_{22}=(-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 3\end{pmatrix}$ $=1\times3$ $=3$	**C_{23} (2, 3)** $A_{23}=(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 0\end{pmatrix}$ $=(-1)\times0$ $=0$
C_{31} (3, 1) $A_{31}=(-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$ $=1\times0$ $=0$	**C_{32} (3, 2)** $A_{32}=(-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$ $=(-1)\times(-1)$ $=1$	**C_{33} (3, 3)** $A_{33}=(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$ $=1\times1$ $=1$

Матрица $n \times n$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

которая на месте (i, j) имеет алгебраическое дополнение (j, i)[1] оригинальной матрицы, называемое матрицей алгебраических дополнений.

Сумма любой строки или столбца матрицы $n \times n$

$$\begin{pmatrix} a_{11}A_{11} & a_{21}A_{21} & \cdots & a_{n1}A_{n1} \\ a_{12}A_{12} & a_{22}A_{22} & \cdots & a_{n2}A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}A_{1n} & a_{2n}A_{2n} & \cdots & a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix}$$

равна определителю оригинальной матрицы $n \times n$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

4.5.3. Вычисление обратных матриц

Обратную матрицу можно вычислить по следующей формуле:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

[1] Это не опечатка. (j, i)-алгебраическое дополнение – это правильный порядок индексов. Это транспонированная матрица матрицы с алгебраическими дополнениями в ожидаемом порядке.

Например, обратная матрица матрицы 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.6. ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Метод, представленный в этой главе, позволяет вычислить определитель и совсем не объясняет, для чего его используют. При типичном его применении (например, при обработке изображения) определитель легко может достигнуть размеров диапазона $n = 100$, что означает невообразимое число вычислений, если использовать описанные здесь подходы.

Поэтому определители обычно вычисляют после упрощения методами вроде метода Гаусса, а потом применяют три этих свойства, которые можно вывести с помощью определения, представленного в этой книге:

- если строку (или столбец) в определителе заменить суммой строки (столбца) и произведением другой строки (столбца), значение останется неизменным;
- если две строки (или столбца) поменять местами, значение определителя умножается на –1;
- значение определителя верхних треугольных или нижних треугольных матриц равно произведению их главной диагонали.

Разница между двумя этими методами настолько велика, что определители, которые практически невозможно вычислить (даже используя компьютеры) с помощью первого метода, в два счета можно вычислить с помощью второго.

4.7. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРАВИЛА КРАМЕРА

Метод Гаусса, который показан на стр. 94, всего лишь один из многих методов решения линейных систем уравнений. Хотя метод Гаусса – это один из лучших способов решить их вручную, всегда полезно знать об альтернативных подходах. Поэтому далее мы покажем правило Крамера.

Задача

Решить следующее уравнение с помощью правила Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1+1x_2=1 \\ 1x_1+2x_2=0 \end{cases}.$$

Решение

Шаг 1

Переписываем систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

вот так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Если мы переписываем систему

$$\begin{cases} 3x_1+1x_2=1 \\ 1x_1+2x_2=0 \end{cases},$$

то получаем:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 2

Убедитесь, что

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\neq 0$$

Получаем

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=3\times 2-1\times 1\neq 0$$

Шаг 3

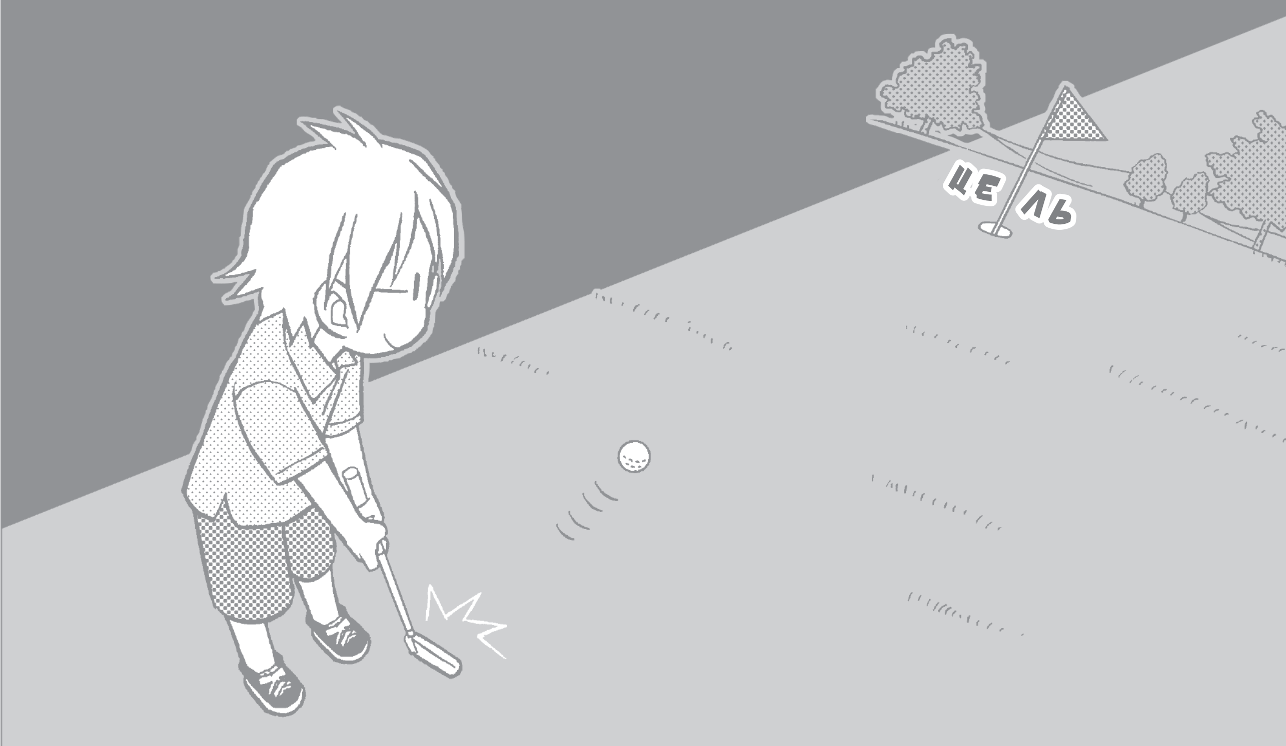
Заменим каждый столбец столбцом свободных членов, чтобы получить соответствующее решение:

$$x_i=\frac{\det\begin{array}{c} \text{Столбец } i \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\end{array}}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}$$

- $x_1=\dfrac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}=\dfrac{1\times 2-1\times 0}{5}=\dfrac{2}{5}$
- $x_2=\dfrac{\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}=\dfrac{3\times 0-1\times 1}{5}=-\dfrac{1}{5}$

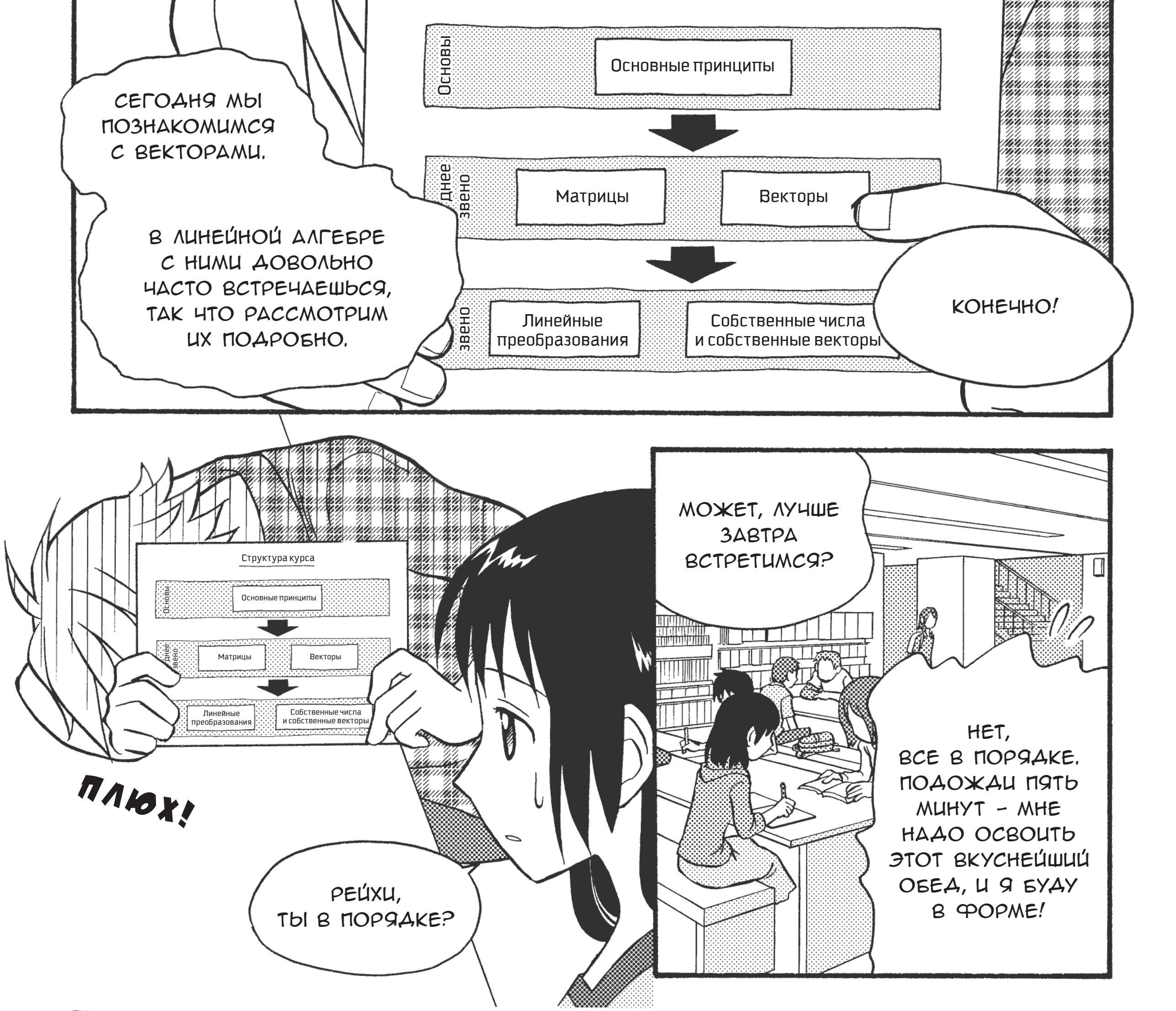
ГЛАВА 5

ПОЗНАКОМИМСЯ С ВЕКТОРАМИ

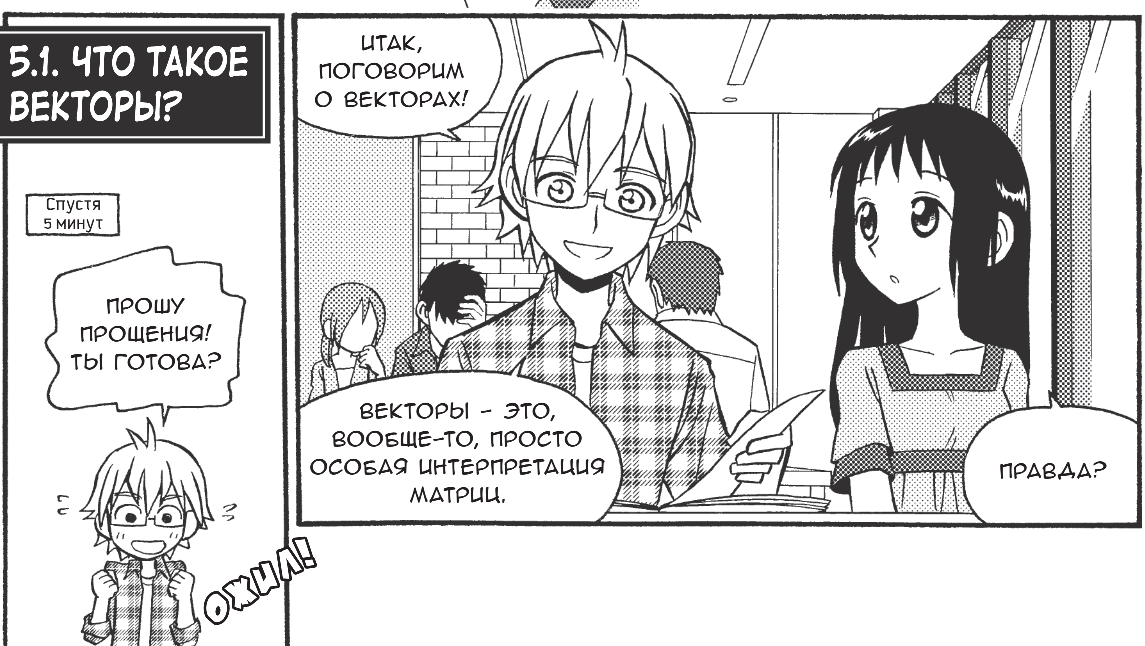


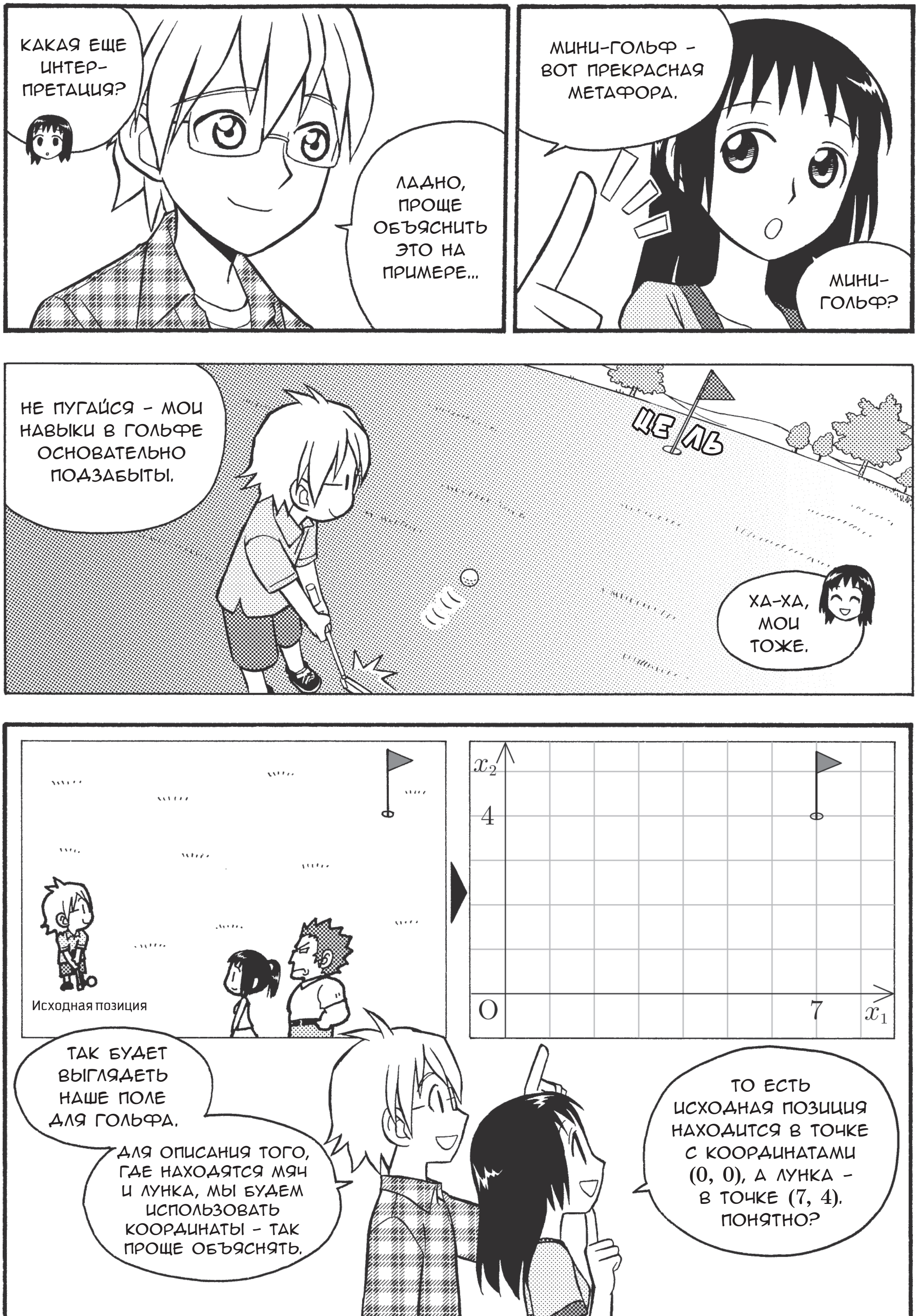
ЕЩЕ НЕМНОГО!
БАМ!
ФУХ! ФУХ!
ОССУ!
ТЫ МОЖЕШЬ ЛУЧШЕ!
ХРЯСЬ!
ВЛОЖИСЬ В УДАР ВСЕМ ТЕЛОМ!
ОССУ!
БАМ!
ОТЛИЧНО!
ВСЕ. НА СЕГОДНЯ ХВАТИТ.
ФУУУХ
ПЫХ! ПЫХ!
Е-ЕЩЕ?!


Я МОГУ ЕЩЕ!
ДА ТЫ ЕЛЕ СТОИШЬ!
БУХ!
УЯ!
ЕЩЕ ОДИН РАУНД!
Я ПОКА НЕ СТАЛ СИЛЬНЕЕ! НИ КАПЛИ!
ХЕ-ХЕ, МЕНЯ ЭТО УСТРАИВАЕТ!
ОССУ!



5.1. Что такое векторы?




Какая еще интер-претация?
Ладно, проще объяснить это на примере...
Мини-гольф - вот прекрасная метафора.
Мини-гольф?
Не пугайся - мои навыки в гольфе основательно подзабыты.
ЦЕЛЬ
Ха-ха, мои тоже.
Исходная позиция
x_2
4
O
7
x_1
Так будет выглядеть наше поле для гольфа.
Для описания того, где находятся мяч и лунка, мы будем использовать координаты - так проще объяснять.
То есть исходная позиция находится в точке с координатами $(0, 0)$, а лунка - в точке $(7, 4)$. Понятно?

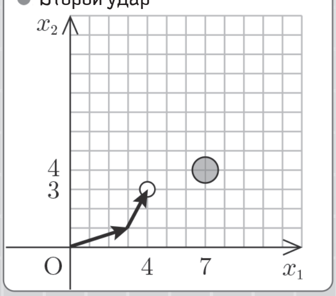
Игрок № 1

Рейхи Юурино

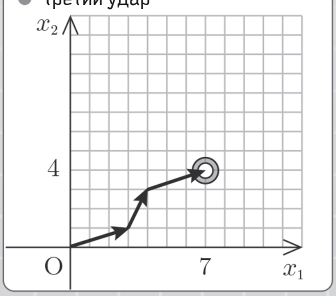
Повтор

Первый удар

Второй удар



Третий удар



Статистика по ударам

	Первый удар	Второй удар	Третий удар
Положение мяча	Точка (3, 1)	Точка (4, 3)	Точка (7, 4)
Положение мяча относительно его последнего положения	3 вправо и 1 вверх относительно (0, 0)	1 вправо и 2 вверх относительно (3, 1)	3 вправо и 1 вверх относительно (4, 3)
Перемещение мяча, выраженное в форме (вправо, вверх)	(3, 1)	(3, 1) + (1, 2) = (4, 3)	(3, 1) + (1, 2) + (3, 1) = (7, 4)

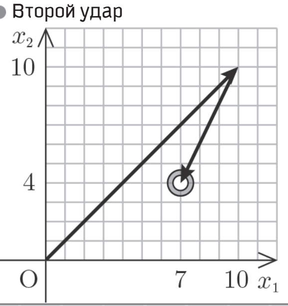
Игрок № 2

Миса Ичиносе

Повтор

● Первый удар

● Второй удар



Статистика по ударам

	Первый удар	Второй удар
Положение мяча	Точка (10, 10)	Точка (7, 4)
Положение мяча относительно его последнего положения	10 вправо и 10 вверх относительно (0, 0)	–3 вправо и –6 вверх относительно (10, 10)
Перемещение мяча, выраженное в форме (вправо, вверх)	(10, 10)	(10, 10) + (–3, –6) = (7, 4)

Игрок № 3

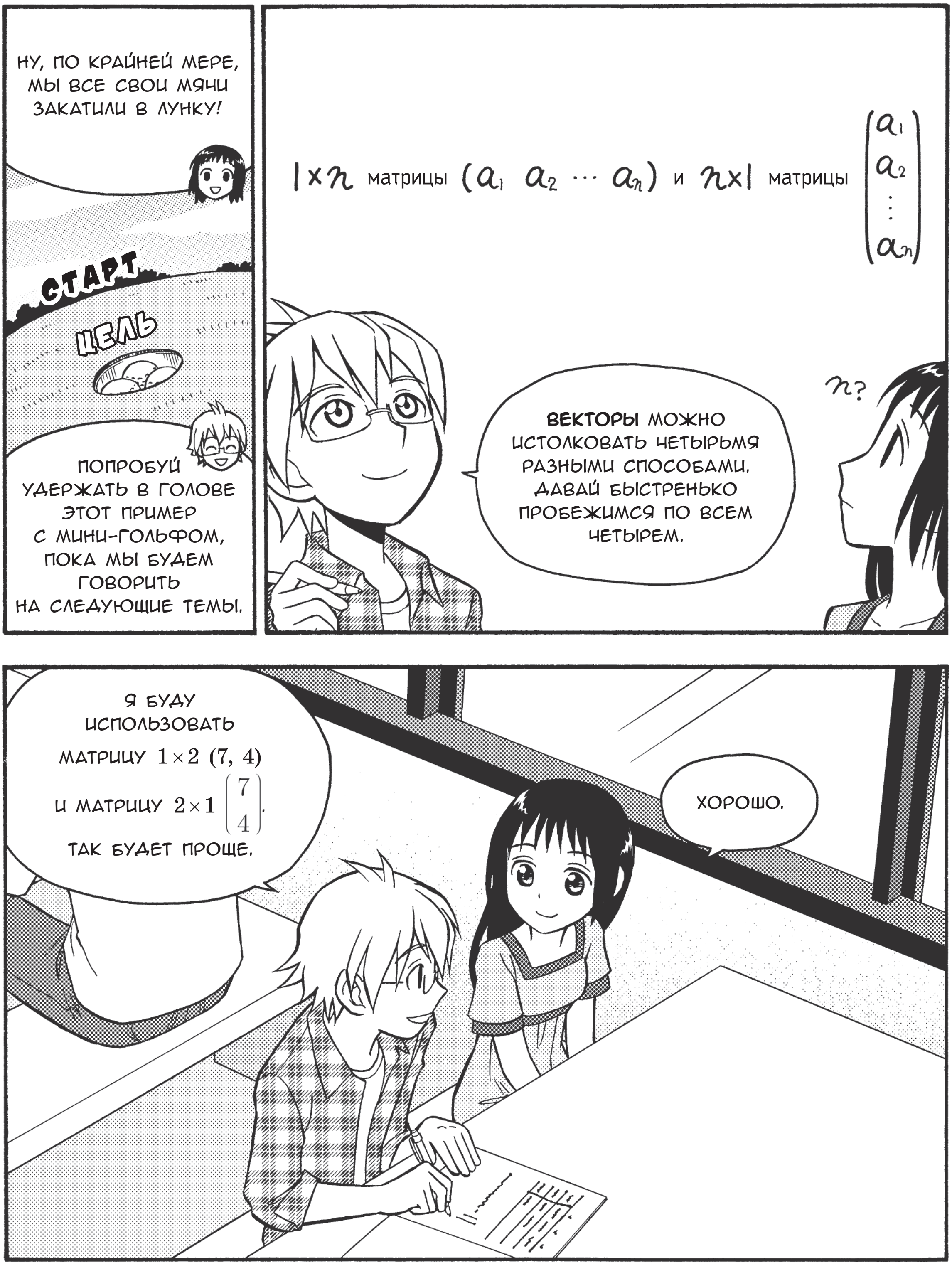
Тетсуо Ичиносе

Повтор

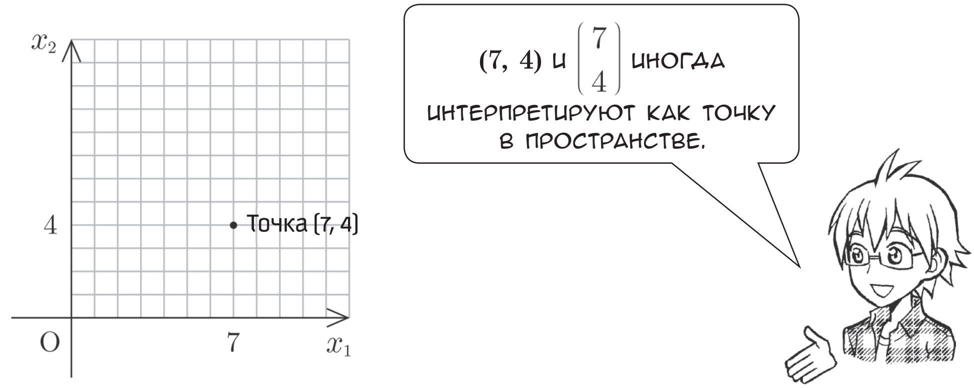
● Первый удар

Статистика по ударам

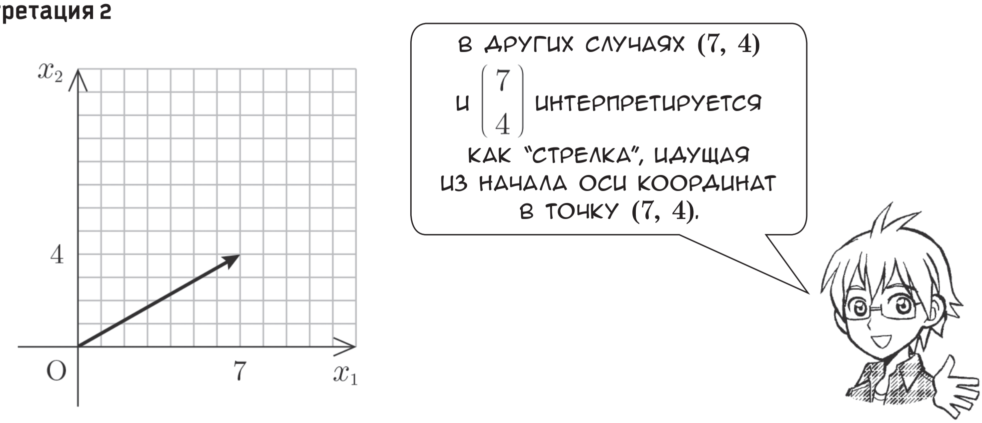
	Первый удар
Положение мяча	Точка (7, 4)
Положение мяча относительно его последнего положения	7 вправо и 4 вверх относительно (0, 0)
Перемещение мяча, выраженное в форме (вправо, вверх)	(7, 4)


НУ, ПО КРАЙНЕЙ МЕРЕ, МЫ ВСЕ СВОИ МЯЧИ ЗАКАТИЛИ В ЛУНКУ!
СТАРТ
ЦЕЛЬ
ПОПРОБУЙ УДЕРЖАТЬ В ГОЛОВЕ ЭТОТ ПРИМЕР С МИНИ-ГОЛЬФОМ, ПОКА МЫ БУДЕМ ГОВОРИТЬ НА СЛЕДУЮЩИЕ ТЕМЫ.
$1\times n$ матрицы $(a_1\ \ a_2\ \cdots\ a_n)$ и $n\times 1$ матрицы $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
ВЕКТОРЫ МОЖНО ИСТОЛКОВАТЬ ЧЕТЫРЬМЯ РАЗНЫМИ СПОСОБАМИ. ДАВАЙ БЫСТРЕНЬКО ПРОБЕЖИМСЯ ПО ВСЕМ ЧЕТЫРЕМ.
n?
Я БУДУ ИСПОЛЬЗОВАТЬ МАТРИЦУ 1×2 $(7,\ 4)$ И МАТРИЦУ 2×1 $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$. ТАК БУДЕТ ПРОЩЕ.
ХОРОШО.

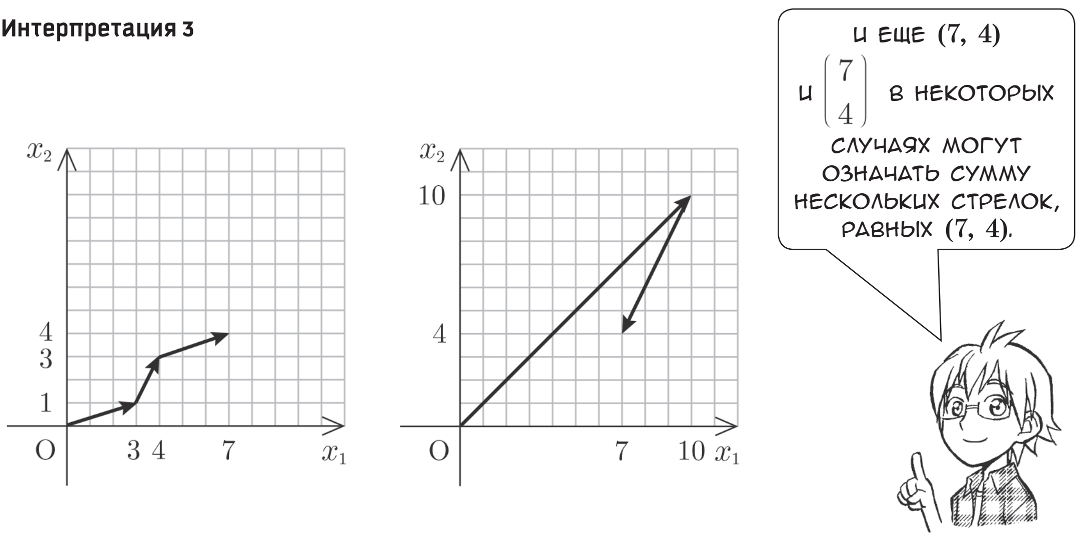
Интерпретация 1

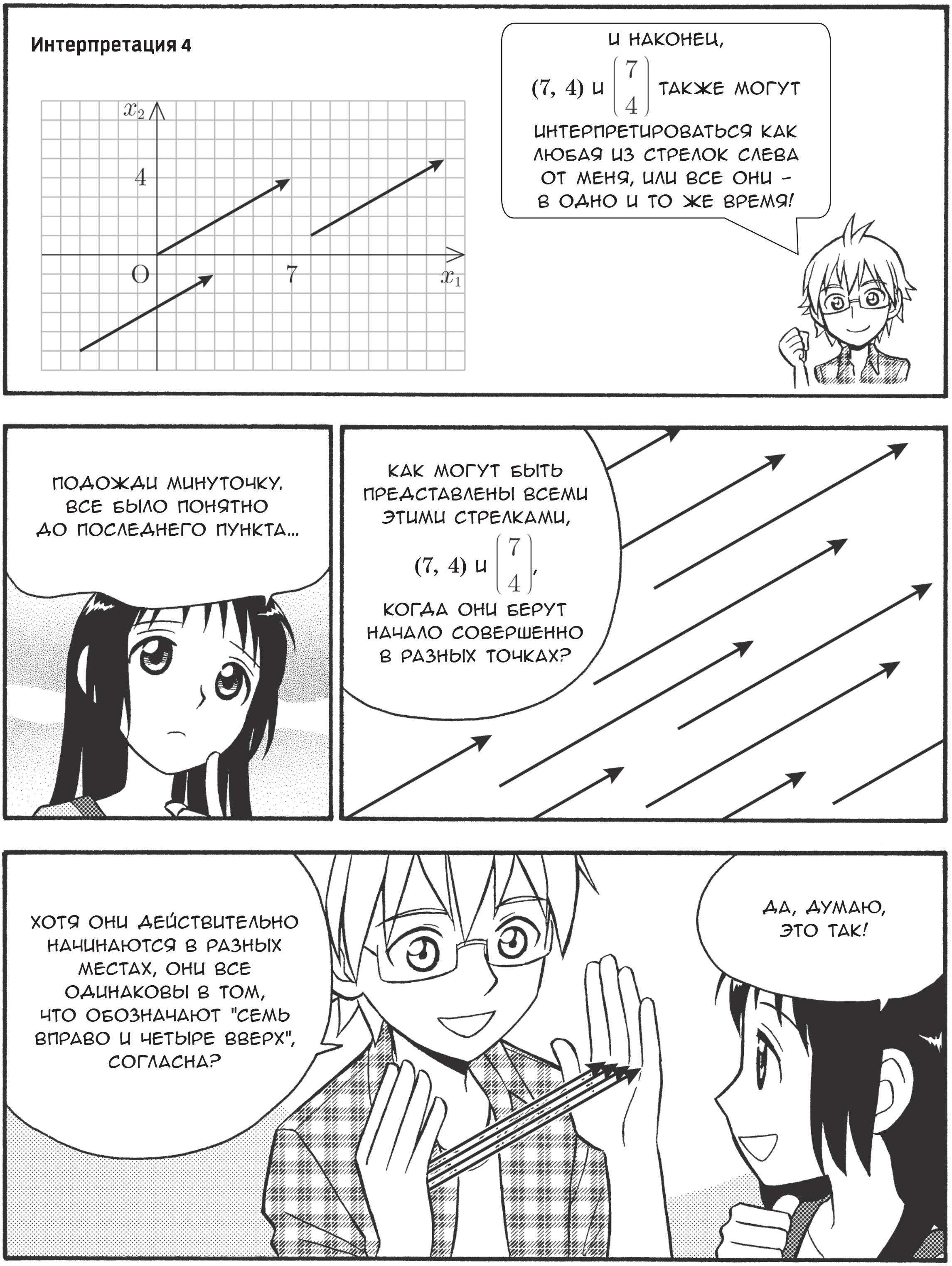


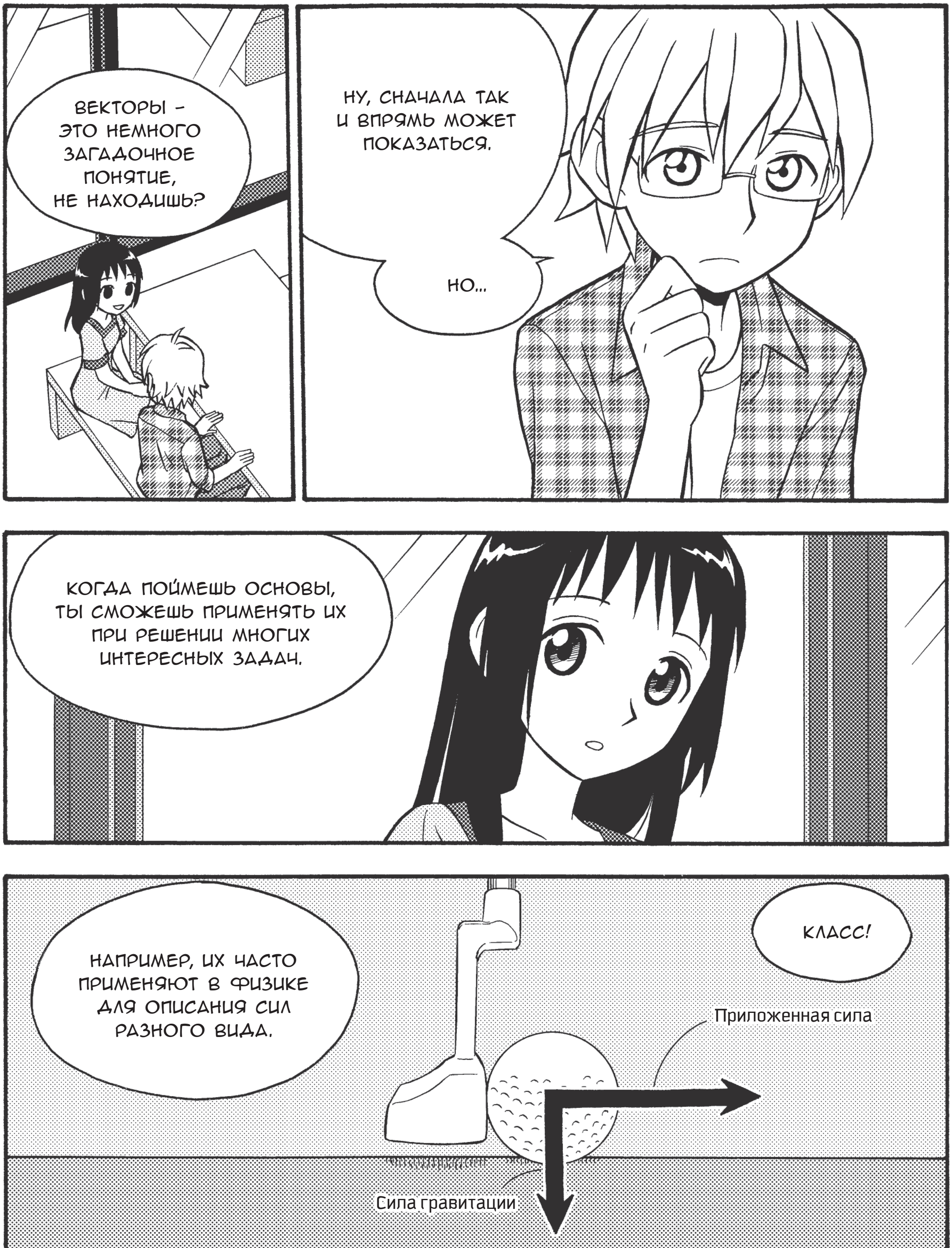
Интерпретация 2



Интерпретация 3




Интерпретация 4
x_2
4
O
7
x_1
И НАКОНЕЦ, (7, 4) И $\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ ТАКЖЕ МОГУТ ИНТЕРПРЕТИРОВАТЬСЯ КАК ЛЮБАЯ ИЗ СТРЕЛОК СЛЕВА ОТ МЕНЯ, ИЛИ ВСЕ ОНИ – В ОДНО И ТО ЖЕ ВРЕМЯ!
ПОДОЖДИ МИНУТОЧКУ. ВСЕ БЫЛО ПОНЯТНО ДО ПОСЛЕДНЕГО ПУНКТА...
КАК МОГУТ БЫТЬ ПРЕДСТАВЛЕНЫ ВСЕМИ ЭТИМИ СТРЕЛКАМИ, (7, 4) И $\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$, КОГДА ОНИ БЕРУТ НАЧАЛО СОВЕРШЕННО В РАЗНЫХ ТОЧКАХ?
ХОТЯ ОНИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНО НАЧИНАЮТСЯ В РАЗНЫХ МЕСТАХ, ОНИ ВСЕ ОДИНАКОВЫ В ТОМ, ЧТО ОБОЗНАЧАЮТ "СЕМЬ ВПРАВО И ЧЕТЫРЕ ВВЕРХ", СОГЛАСНА?
ДА, ДУМАЮ, ЭТО ТАК!


ВЕКТОРЫ – ЭТО НЕМНОГО ЗАГАДОЧНОЕ ПОНЯТИЕ, НЕ НАХОДИШЬ?
НУ, СНАЧАЛА ТАК И ВПРЯМЬ МОЖЕТ ПОКАЗАТЬСЯ.
НО...
КОГДА ПОЙМЕШЬ ОСНОВЫ, ТЫ СМОЖЕШЬ ПРИМЕНЯТЬ ИХ ПРИ РЕШЕНИИ МНОГИХ ИНТЕРЕСНЫХ ЗАДАЧ.
НАПРИМЕР, ИХ ЧАСТО ПРИМЕНЯЮТ В ФИЗИКЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СИЛ РАЗНОГО ВИДА.
КЛАСС!
Приложенная сила
Сила гравитации

5.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Сложение

$\cdot\ \begin{pmatrix}10 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+(-3) & 10+(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4\end{pmatrix}$

$\cdot\ \begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+(-3)\\10+(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$

Вычитание

$\cdot\ \begin{pmatrix}10 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10-3 & 10-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4\end{pmatrix}$

$\cdot\ \begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10-3\\10-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$

Скалярное умножение

$\cdot\ 2\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times3 & 2\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2\end{pmatrix}$

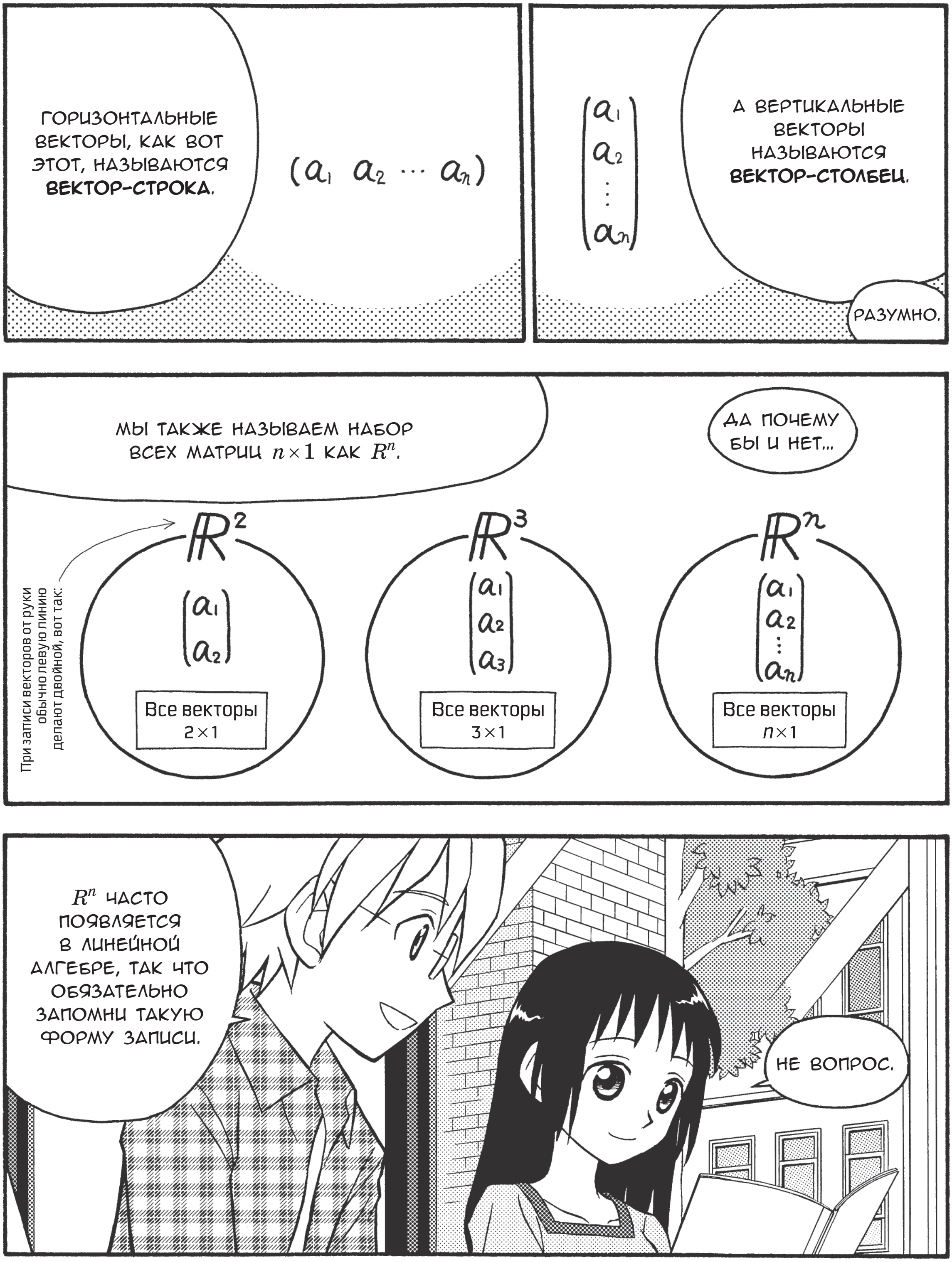
$\cdot\ 2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times3\\2\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

Перемножение матриц

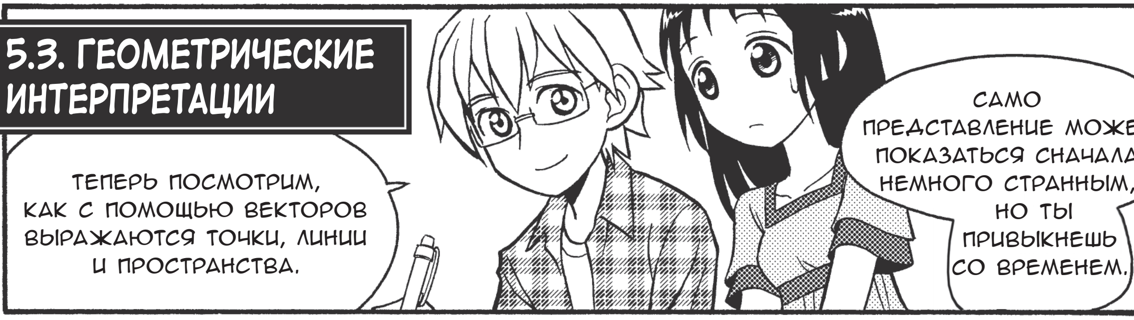
$\cdot\ \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times1 & 3\times2\\1\times1 & 1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{pmatrix}$

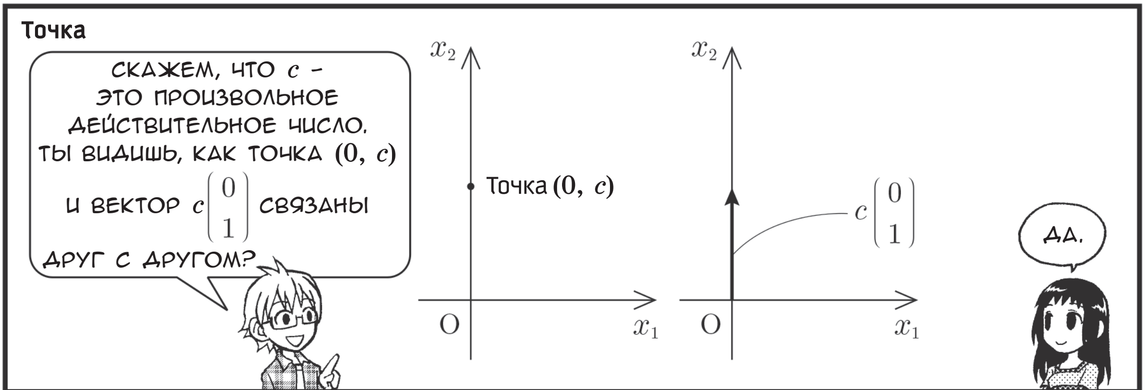
$\cdot\ \begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times1+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}$

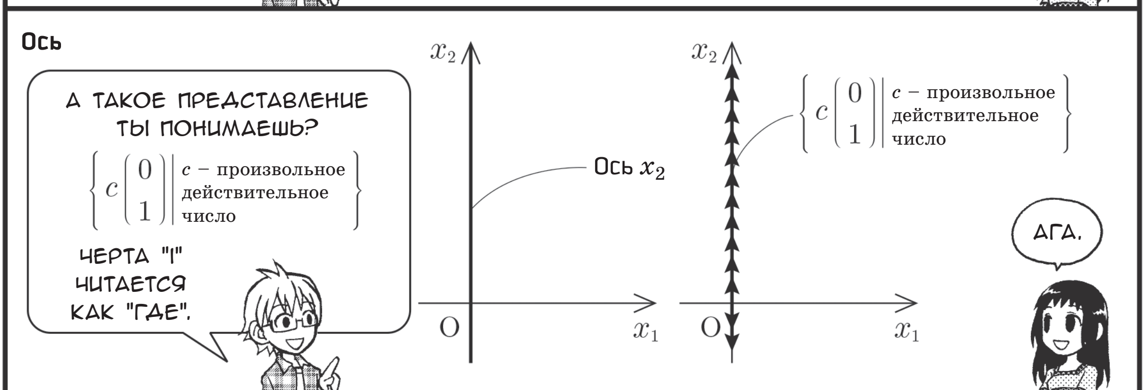
$\cdot\ \begin{pmatrix}8 & -3\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\times3+(-3)\times1\\2\times3+1\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\7\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

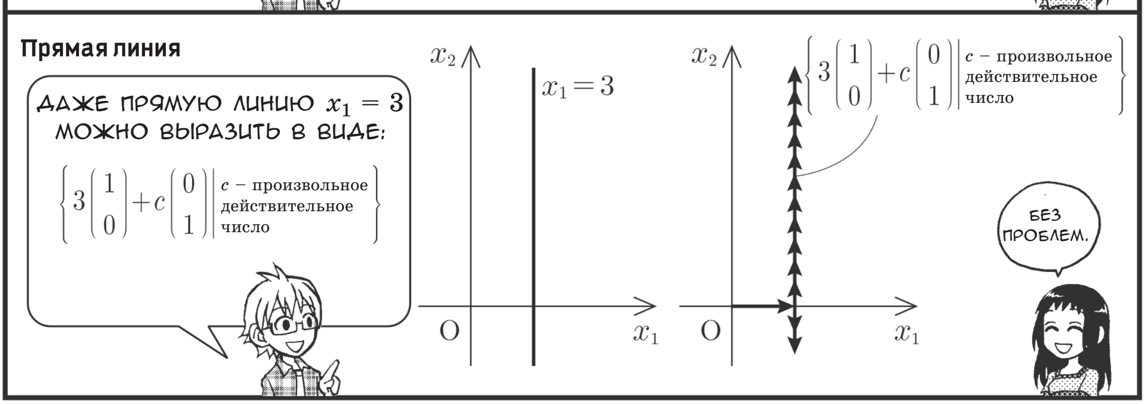

Горизонтальные векторы, как вот этот, называются **вектор-строка**.
$(a_1 \; a_2 \; \cdots \; a_n)$
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
А вертикальные векторы называются **вектор-столбец**.
Разумно.
Мы также называем набор всех матриц $n \times 1$ как R^n.
Да почему бы и нет...
При записи векторов от руки обычно делают левую линию двойной, вот так:
$\mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
Все векторы 2×1
$\mathbb{R}^3$
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
Все векторы 3×1
$\mathbb{R}^n$
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
Все векторы $n \times 1$
R^n часто появляется в линейной алгебре, так что обязательно запомни такую форму записи.
Не вопрос.

5.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

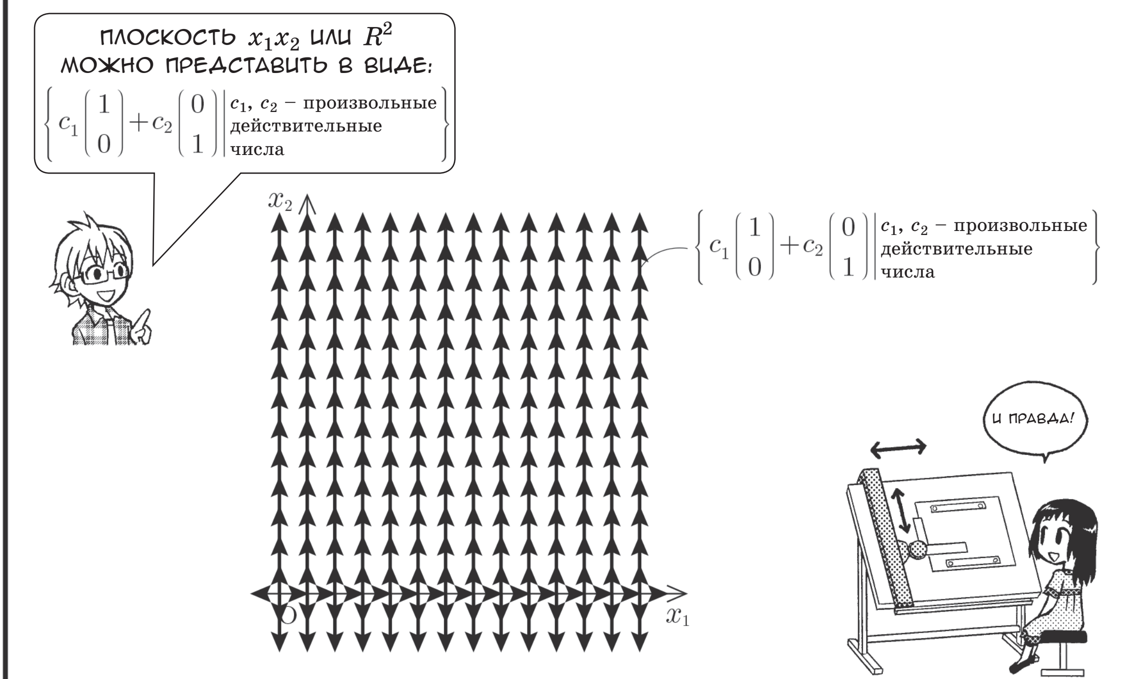




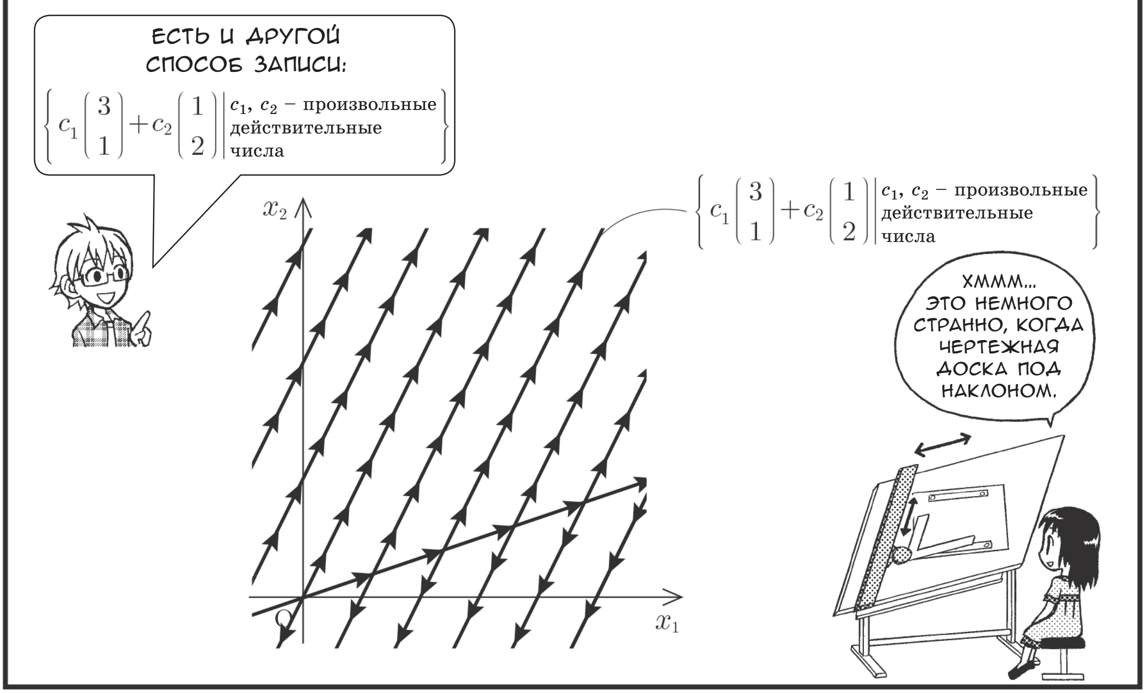




Плоскость



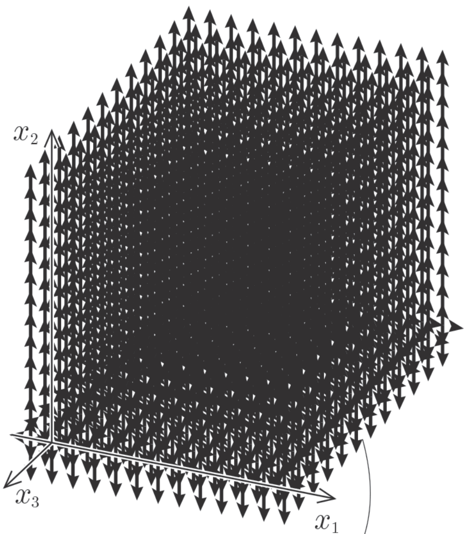
Другая плоскость



Векторное пространство

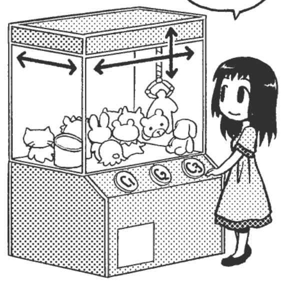
ТРЕХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО R^3 – ЭТО ДЕЙСТВИТЕЛЬНО СЛЕДУЮЩИЙ ШАГ. ОНО ОГРАНИЧЕНО x_1, x_2 И x_3 ТАКИМ ВОТ ОБРАЗОМ:

$$\left\{ c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} c_1,\ c_2,\ c_3 \text{ – произвольные} \\ \text{действительные числа}\end{array} \right\}$$



$$\left\{ c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} c_1,\ c_2,\ c_3 \text{ – произвольные} \\ \text{действительные числа}\end{array} \right\}$$

ЧТО-ТО МНЕ НАПОМИНАЕТ.

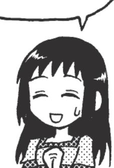


Другое векторное пространство

ТЕПЕРЬ ПОПРОБУЙ ПРЕДСТАВИТЬ n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО R^n, ОГРАНИЧЕННОЕ x_1, x_2, …, x_n:

$$\left\{ c_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+c_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} c_1,\ c_2,\ c_n \text{ – произвольные} \\ \text{действительные числа}\end{array} \right\}$$

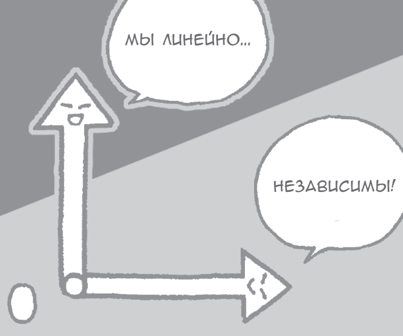
ФОРМУЛУ Я ПОНИМАЮ, НО ПРЕДСТАВИТЬ ЭТО НЕМНОГО СЛОЖНЕЕ.

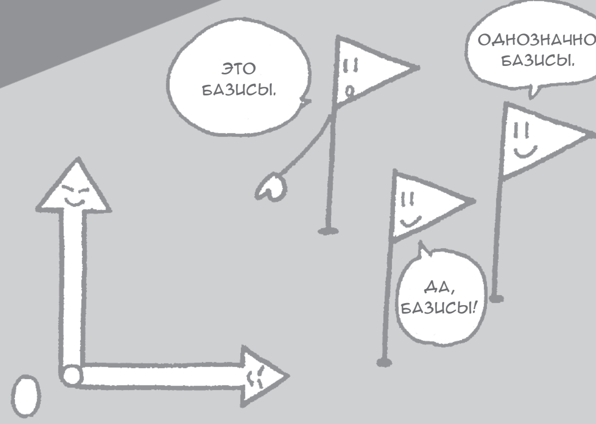


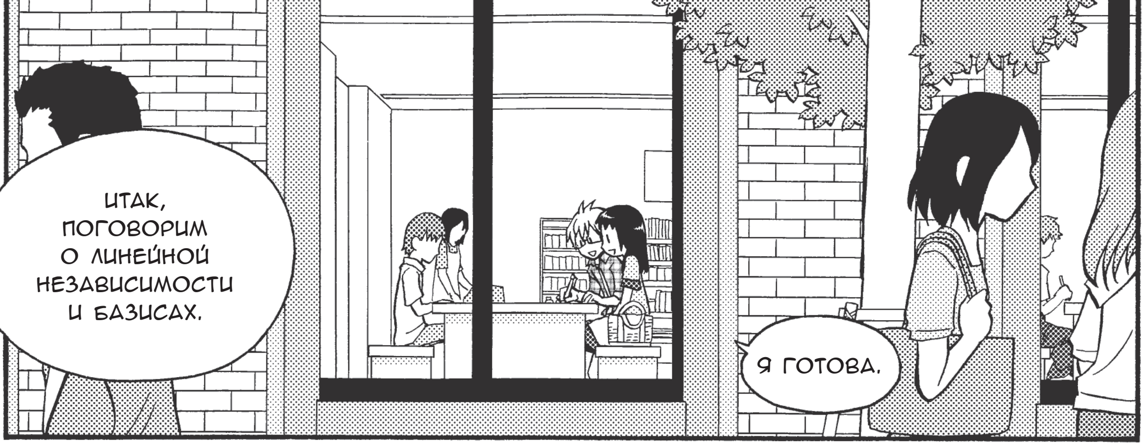

ФУХ, СДАЮСЬ!
ТОГДА ДАВАЙ СДЕЛАЕМ ПЕРЕРЫВ.
ХОРОШАЯ МЫСЛЬ!
КСТАТИ, РЕЙХИ...
А ПОЧЕМУ ТЫ ВООБЩЕ РЕШИЛ ХОДИТЬ В КЛУБ КАРАТЕ?
А?
НУ, ЗНАЕШЬ...
БЕЗ ОСОБЫХ ПРИЧИН, ВООБЩЕ-ТО...
ЭЙ!
?
ДАВАЙ ЛУЧШЕ ВЕРНЕМСЯ К РАБОТЕ!

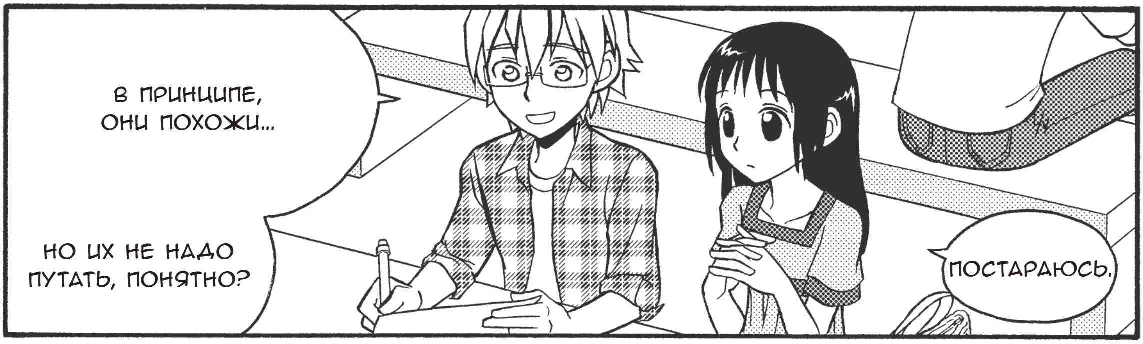
ГЛАВА 6

ЕЩЕ О ВЕКТОРАХ







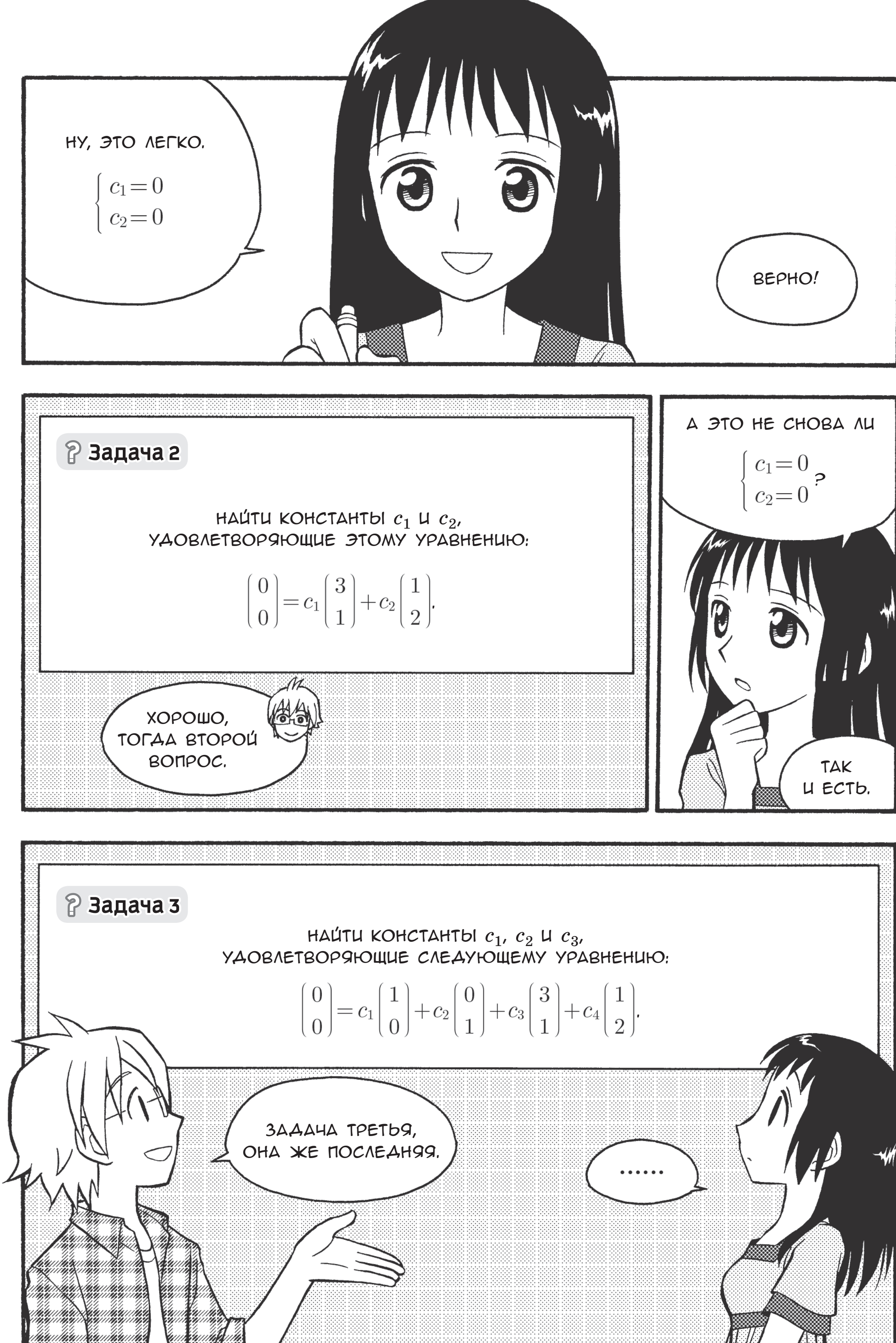


6.1. Линейная независимость

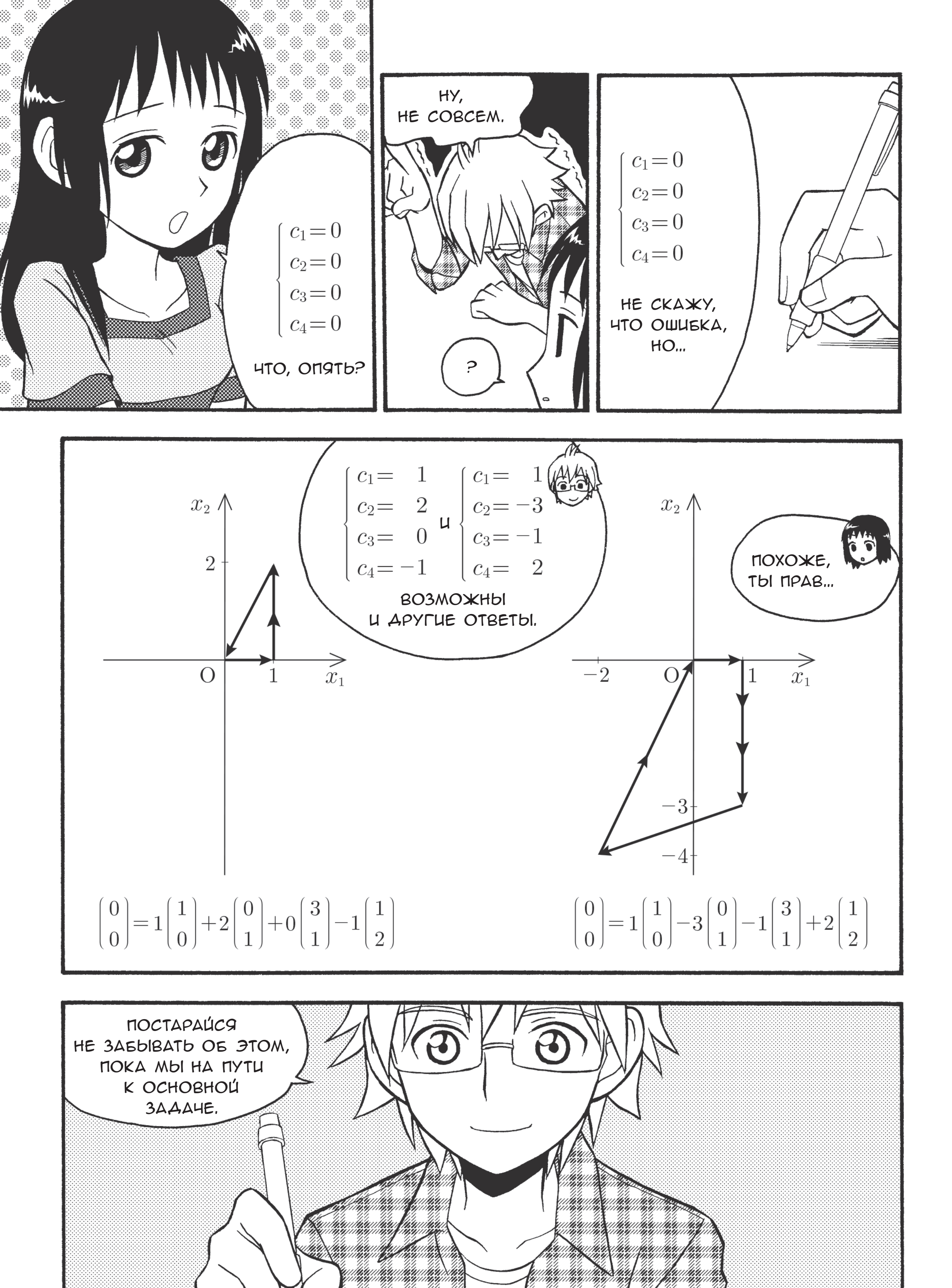
Задача 1

Найти константы c_1 и c_2, удовлетворяющие следующему уравнению:

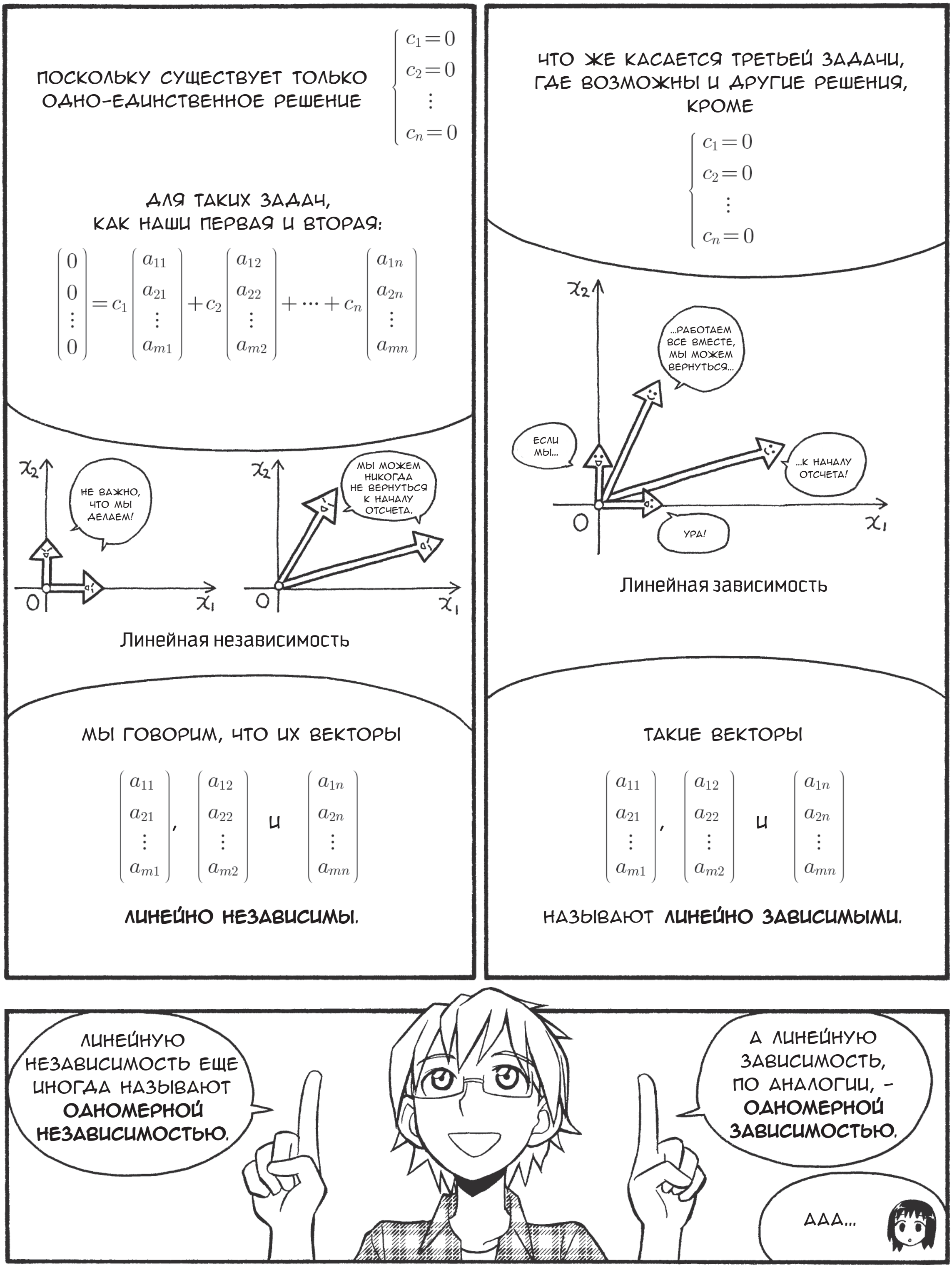
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

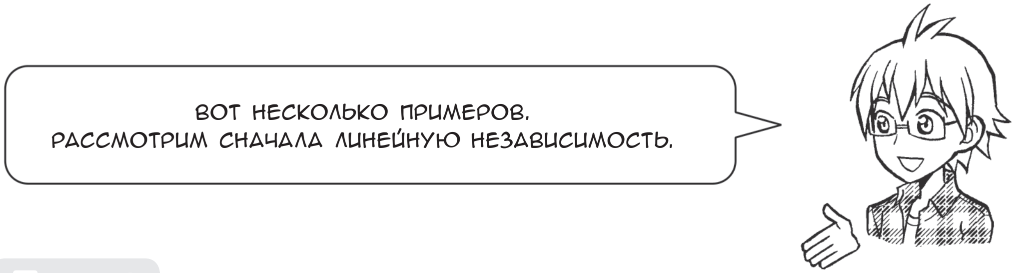


НУ, ЭТО ЛЕГКО.
$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$
ВЕРНО!
Задача 2
НАЙТИ КОНСТАНТЫ c_1 И c_2, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ ЭТОМУ УРАВНЕНИЮ:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$
ХОРОШО, ТОГДА ВТОРОЙ ВОПРОС.
А ЭТО НЕ СНОВА ЛИ $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$?
ТАК И ЕСТЬ.
Задача 3
НАЙТИ КОНСТАНТЫ c_1, c_2 И c_3, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ СЛЕДУЮЩЕМУ УРАВНЕНИЮ:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$
ЗАДАЧА ТРЕТЬЯ, ОНА ЖЕ ПОСЛЕДНЯЯ.
......



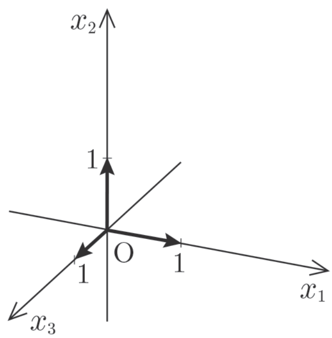
$c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$
ЧТО, ОПЯТЬ?
НУ, НЕ СОВСЕМ.
?
$c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$
НЕ СКАЖУ, ЧТО ОШИБКА, НО...
$c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$, $c_4 = -1$ и $c_1 = 1$, $c_2 = -3$, $c_3 = -1$, $c_4 = 2$
ВОЗМОЖНЫ И ДРУГИЕ ОТВЕТЫ.
ПОХОЖЕ, ТЫ ПРАВ...
x_2, x_1, O, 1, 2
x_2, x_1, O, 1, −2, −3, −4
$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
ПОСТАРАЙСЯ НЕ ЗАБЫВАТЬ ОБ ЭТОМ, ПОКА МЫ НА ПУТИ К ОСНОВНОЙ ЗАДАЧЕ.


ПОСКОЛЬКУ СУЩЕСТВУЕТ ТОЛЬКО ОДНО-ЕДИНСТВЕННОЕ РЕШЕНИЕ
$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ \vdots \\ c_n = 0 \end{cases}$
ДЛЯ ТАКИХ ЗАДАЧ, КАК НАШИ ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$
x_2
НЕ ВАЖНО, ЧТО МЫ ДЕЛАЕМ!
0
x_1
x_2
МЫ МОЖЕМ НИКОГДА НЕ ВЕРНУТЬСЯ К НАЧАЛУ ОТСЧЕТА.
0
x_1
Линейная независимость
МЫ ГОВОРИМ, ЧТО ИХ ВЕКТОРЫ
$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$ И $\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$
ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫ.
ЧТО ЖЕ КАСАЕТСЯ ТРЕТЬЕЙ ЗАДАЧИ, ГДЕ ВОЗМОЖНЫ И ДРУГИЕ РЕШЕНИЯ, КРОМЕ
$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ \vdots \\ c_n = 0 \end{cases}$
x_2
ЕСЛИ МЫ...
...РАБОТАЕМ ВСЕ ВМЕСТЕ, МЫ МОЖЕМ ВЕРНУТЬСЯ...
...К НАЧАЛУ ОТСЧЕТА!
УРА!
0
x_1
Линейная зависимость
ТАКИЕ ВЕКТОРЫ
$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$ И $\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$
НАЗЫВАЮТ **ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫМИ.**
ЛИНЕЙНУЮ НЕЗАВИСИМОСТЬ ЕЩЕ ИНОГДА НАЗЫВАЮТ **ОДНОМЕРНОЙ НЕЗАВИСИМОСТЬЮ.**
А ЛИНЕЙНУЮ ЗАВИСИМОСТЬ, ПО АНАЛОГИИ, – **ОДНОМЕРНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ.**
ААА...



Пример 1

Векторы $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$



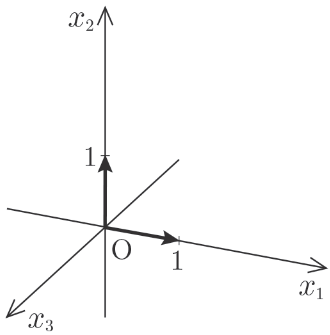
дают нам уравнение $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

у которого одно-единственное решение $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$.

Следовательно, векторы линейно независимы.

Пример 2

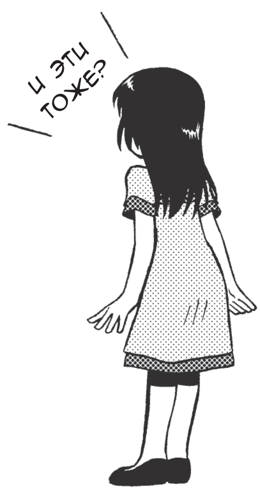
Векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



дают нам уравнение $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

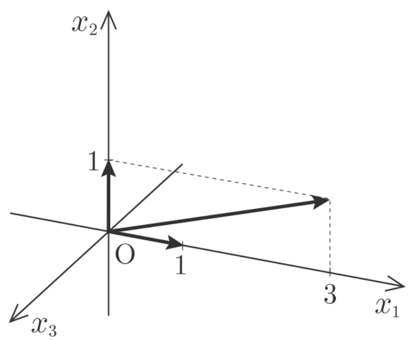
у которого одно-единственное решение $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$.

Следовательно, векторы линейно независимы.



Пример 1

Векторы $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$



дают нам уравнение $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$,

которое имеет несколько решений, например $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 1. \\ c_3 = -1 \end{cases}$

Это означает, что эти векторы линейно зависимы.

Пример 2

Предположим, у нас есть векторы $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, а также уравнение

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}.$$

Эти векторы линейно зависимы, потому что у этой системы есть несколько решений, например:

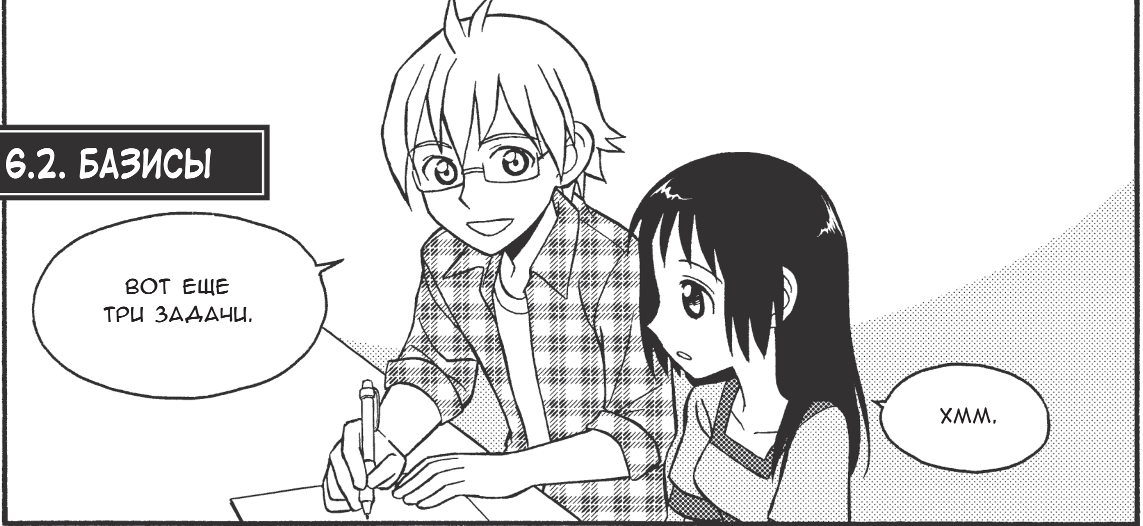
$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases} \text{и} \begin{cases} c_1 = a_1 \\ c_2 = a_2 \\ c_3 = a_3 \\ c_4 = -1 \end{cases}.$$

Векторы $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}$ линейно зависимы, потому что существует несколько решений этого уравнения:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \cdots + c_m\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} + c_{m+1}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}.$$

В их числе есть $\begin{cases} c_1 & = 0 \\ c_2 & = 0 \\ & \vdots \\ c_m & = 0 \\ c_{m+1} & = 0 \end{cases}$, но также и $\begin{cases} c_1 & = a_1 \\ c_2 & = a_2 \\ & \vdots \\ c_m & = a_m \\ c_{m+1} & = -1 \end{cases}$.

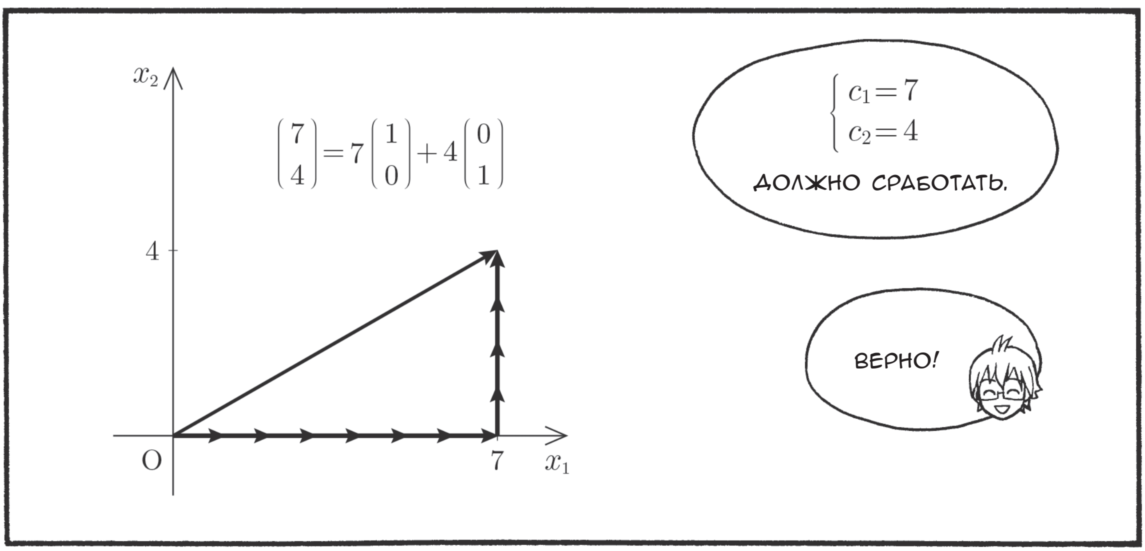
6.2. Базисы

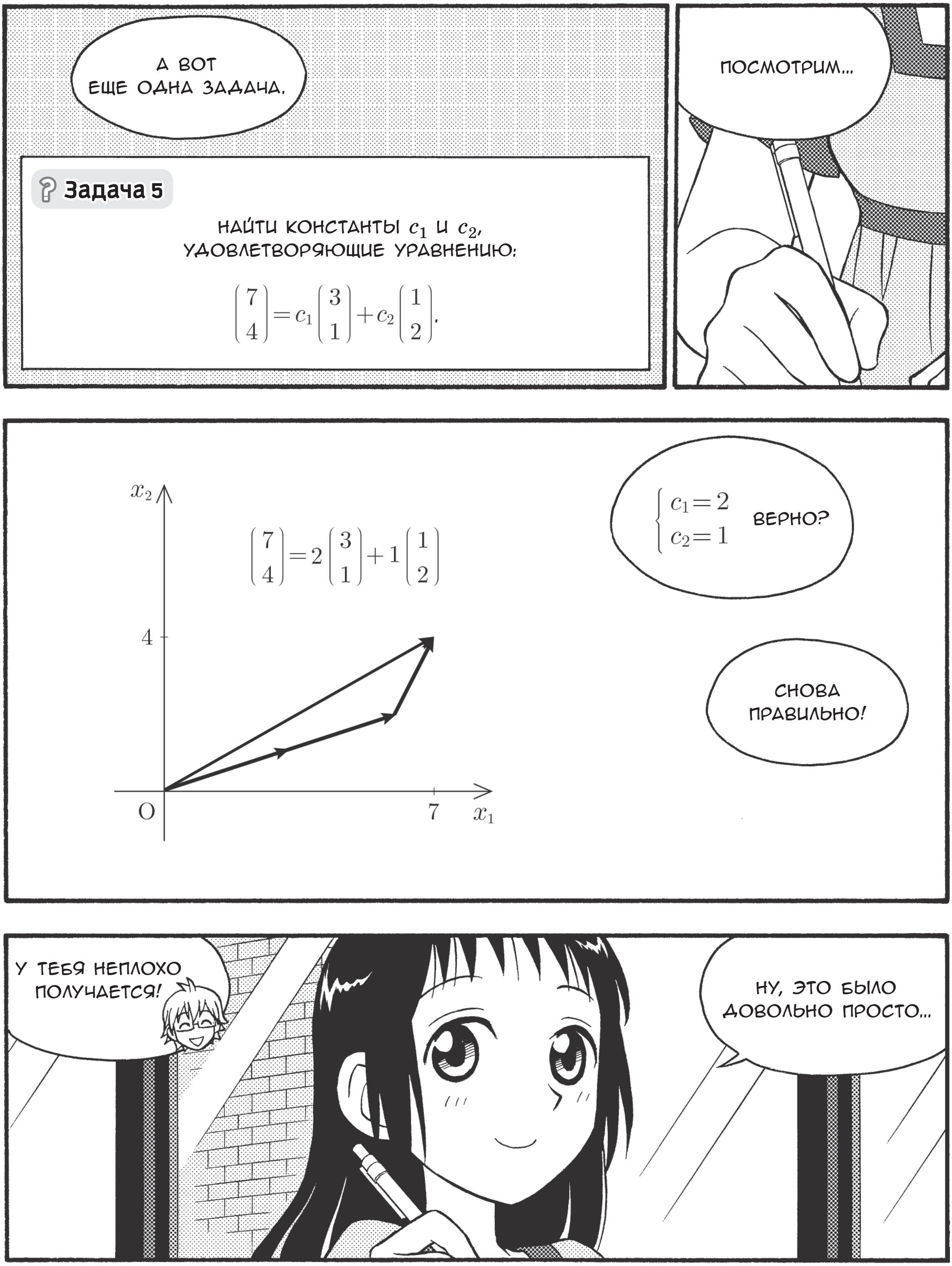


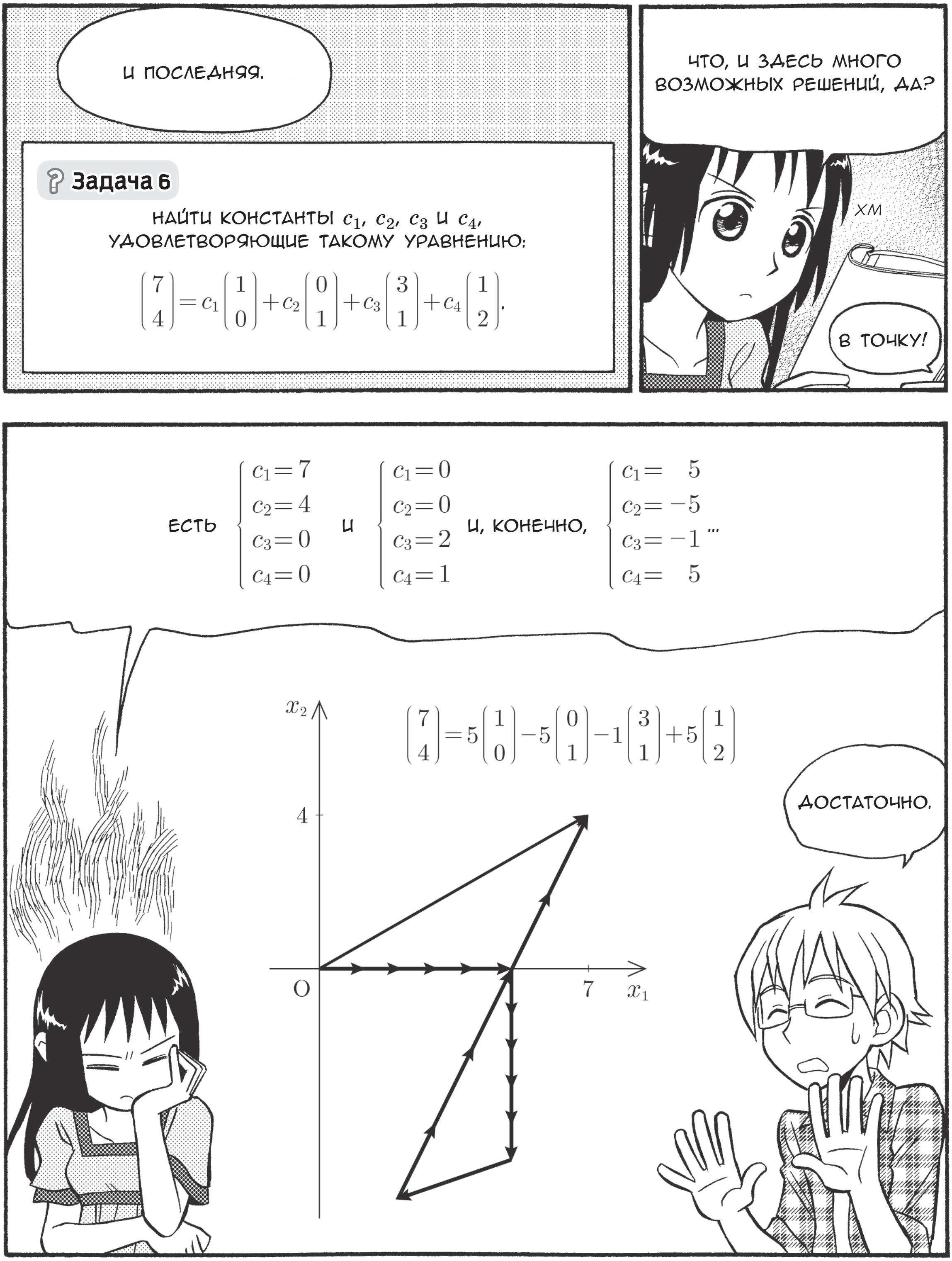
Задача 4

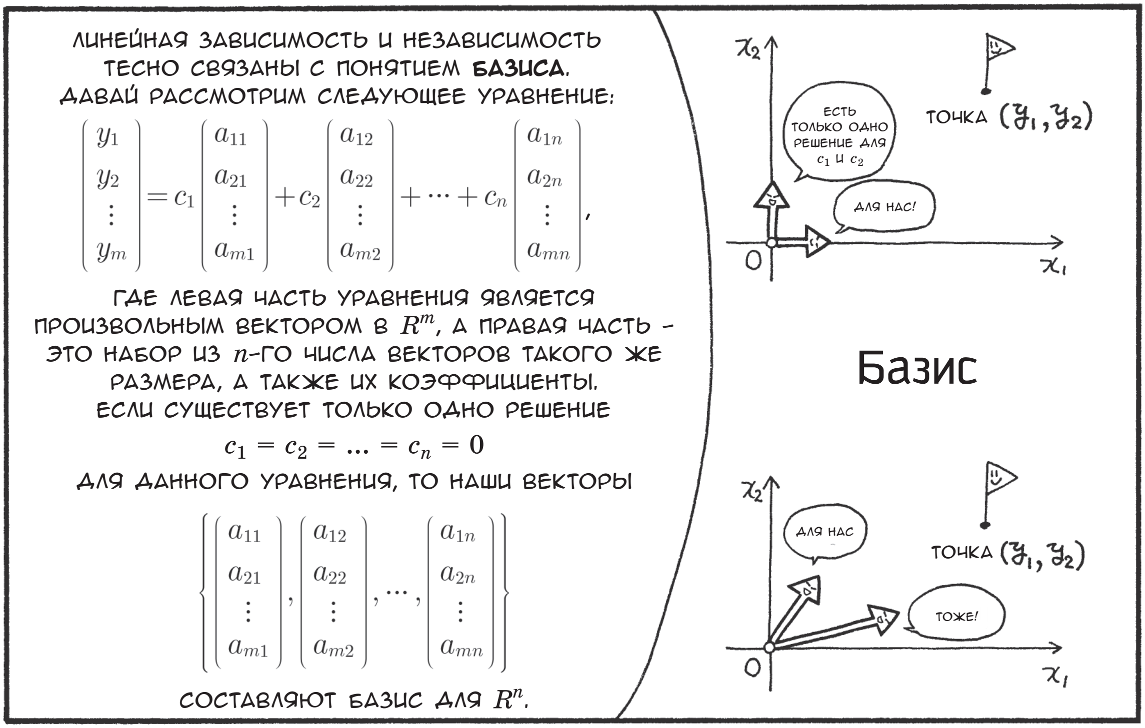
Найти константы c_1 и c_2, удовлетворяющие данному уравнению:

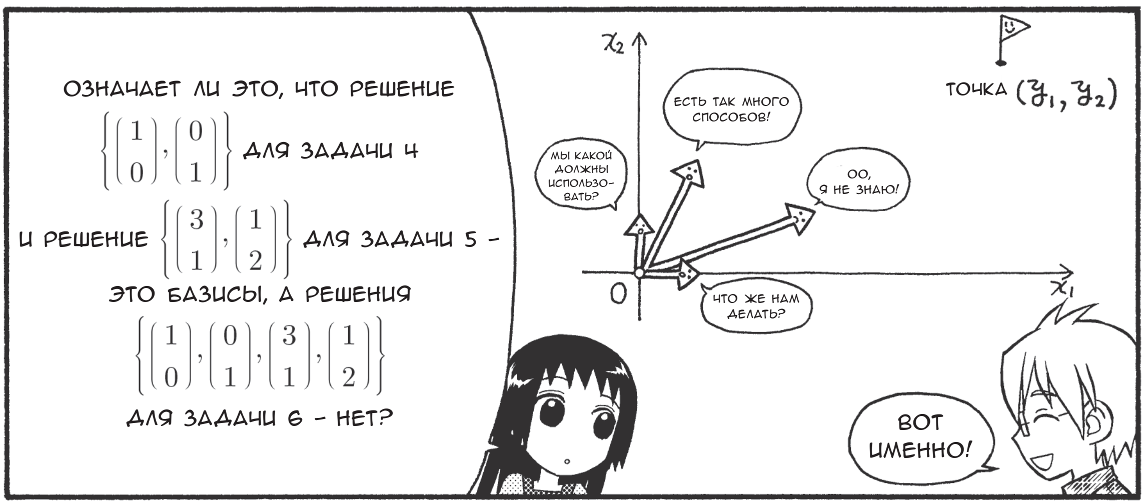
$$\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

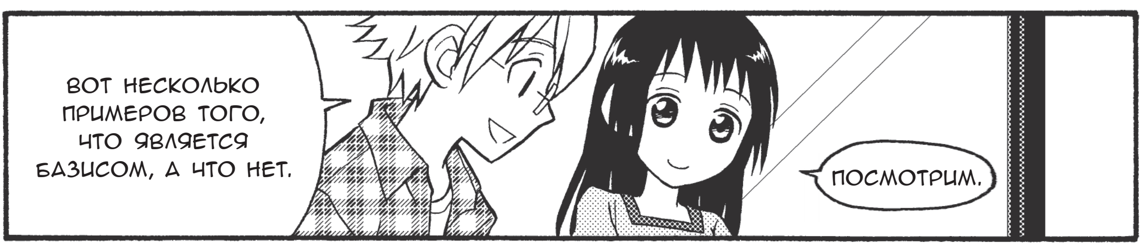


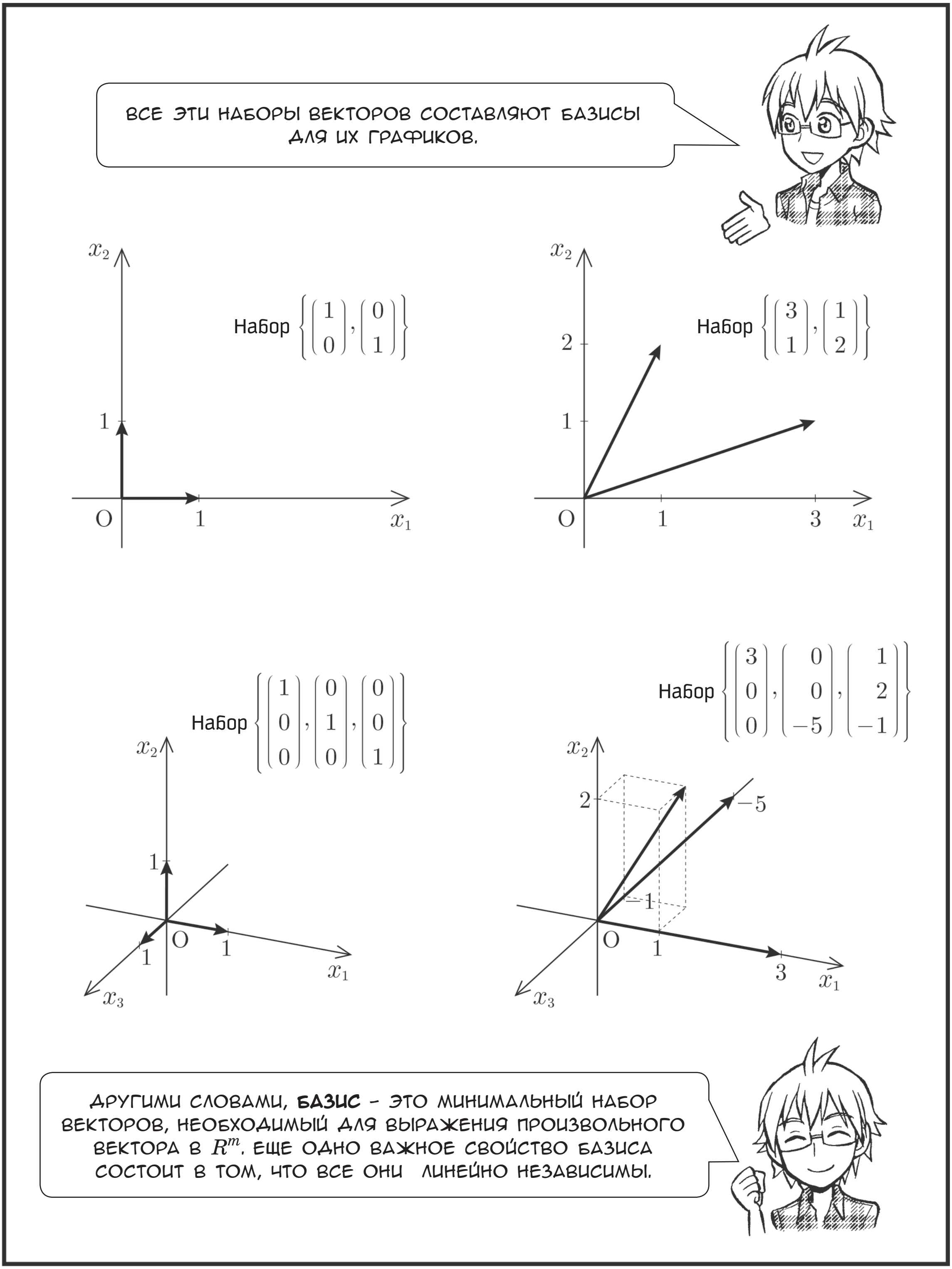

А ВОТ ЕЩЕ ОДНА ЗАДАЧА.
Задача 5
НАЙТИ КОНСТАНТЫ c_1 И c_2, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЮ:
$\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$
ПОСМОТРИМ...
x_2
$\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
4
O
7
x_1
$\begin{cases}c_1=2\\c_2=1\end{cases}$ ВЕРНО?
СНОВА ПРАВИЛЬНО!
У ТЕБЯ НЕПЛОХО ПОЛУЧАЕТСЯ!
НУ, ЭТО БЫЛО ДОВОЛЬНО ПРОСТО...


И последняя.
Задача 6
Найти константы c_1, c_2, c_3 и c_4, удовлетворяющие такому уравнению:
$\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
Что, и здесь много возможных решений, да?
хм
В точку!
Есть $\begin{cases}c_1=7\\c_2=4\\c_3=0\\c_4=0\end{cases}$ и $\begin{cases}c_1=0\\c_2=0\\c_3=2\\c_4=1\end{cases}$ и, конечно, $\begin{cases}c_1=5\\c_2=-5\\c_3=-1\\c_4=5\end{cases}$ ...
$\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
x_2
4
O
7
x_1
Достаточно.

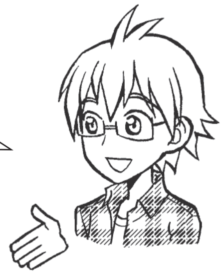

линейная зависимость и независимость тесно связаны с понятием **базиса**. давай рассмотрим следующее уравнение:
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$
где левая часть уравнения является произвольным вектором в R^m, а правая часть – это набор из n-го числа векторов такого же размера, а также их коэффициенты. если существует только одно решение
$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$
для данного уравнения, то наши векторы
$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}$$
составляют базис для R^n.
x_2
x_1
0
точка (y_1, y_2)
есть только одно решение для c_1 и c_2
для нас!
Базис
x_2
x_1
0
для нас
точка (y_1, y_2)
тоже!

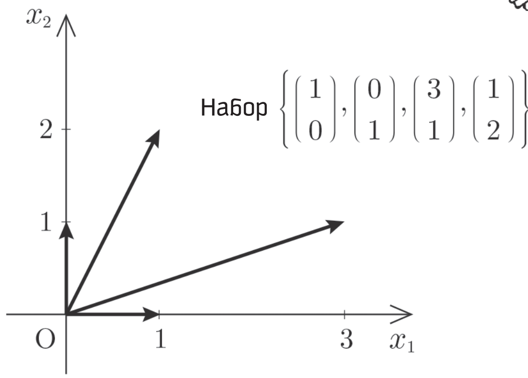

означает ли это, что решение $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ для задачи 4 и решение $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ для задачи 5 – это базисы, а решения $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ для задачи 6 – нет?
x_2
точка (y_1, y_2)
есть так много способов!
мы какой должны использовать?
оо, я не знаю!
0
x_1
что же нам делать?
вот именно!


вот несколько примеров того, что является базисом, а что нет.
посмотрим.


ВСЕ ЭТИ НАБОРЫ ВЕКТОРОВ СОСТАВЛЯЮТ БАЗИСЫ ДЛЯ ИХ ГРАФИКОВ.
Набор $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$
Набор $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$
Набор $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$
Набор $\left\{\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$
x_1
x_2
x_3
O
ДРУГИМИ СЛОВАМИ, **БАЗИС** – ЭТО МИНИМАЛЬНЫЙ НАБОР ВЕКТОРОВ, НЕОБХОДИМЫЙ ДЛЯ ВЫРАЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ВЕКТОРА В R^m. ЕЩЕ ОДНО ВАЖНОЕ СВОЙСТВО БАЗИСА СОСТОИТ В ТОМ, ЧТО ВСЕ ОНИ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫ.

Векторы, входящие в следующий набор, **не** образуют базиса.



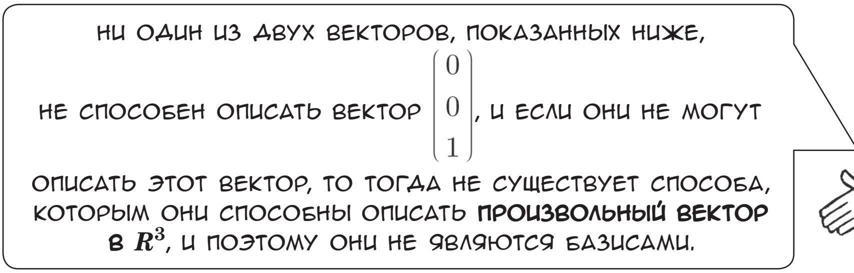


Рассмотрим следующее уравнение, чтобы понять, почему же они не образуют базиса:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

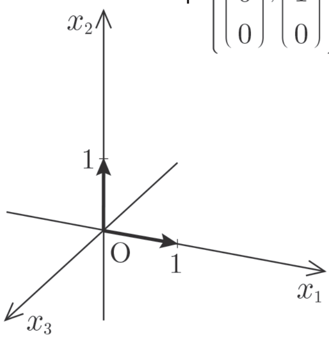
где $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ – это произвольный вектор в R^2.

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ может быть образован различными способами (используя различные варианты для c_1, c_2, c_3 и c_4). Из-за этого данный набор не образует **минимального набора векторов, необходимых для выражения произвольного вектора в R^m**.

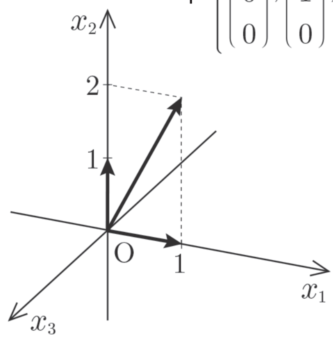


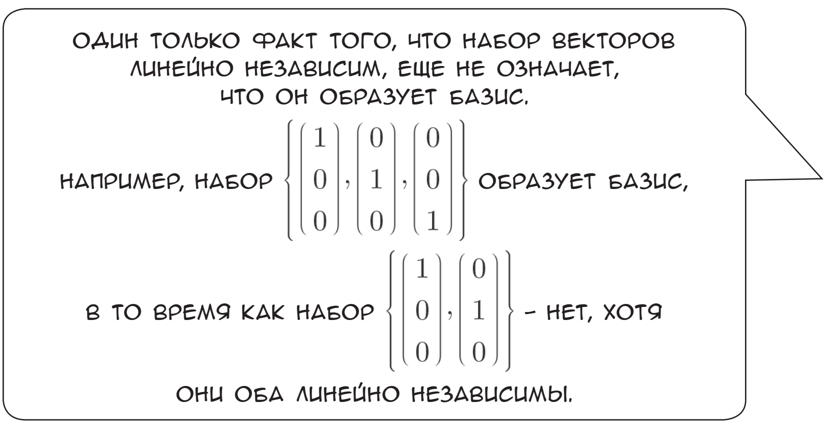
НИ ОДИН ИЗ ДВУХ ВЕКТОРОВ, ПОКАЗАННЫХ НИЖЕ,
НЕ СПОСОБЕН ОПИСАТЬ ВЕКТОР $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, И ЕСЛИ ОНИ НЕ МОГУТ
ОПИСАТЬ ЭТОТ ВЕКТОР, ТО ТОГДА НЕ СУЩЕСТВУЕТ СПОСОБА, КОТОРЫМ ОНИ СПОСОБНЫ ОПИСАТЬ **ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ВЕКТОР В R^3**, И ПОЭТОМУ ОНИ НЕ ЯВЛЯЮТСЯ БАЗИСАМИ.

Набор $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$



Набор $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$



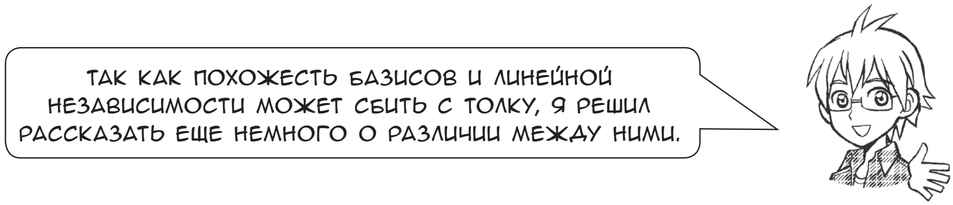


ОДИН ТОЛЬКО ФАКТ ТОГО, ЧТО НАБОР ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМ, ЕЩЕ НЕ ОЗНАЧАЕТ, ЧТО ОН ОБРАЗУЕТ БАЗИС.

НАПРИМЕР, НАБОР $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ОБРАЗУЕТ БАЗИС,

В ТО ВРЕМЯ КАК НАБОР $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ – НЕТ, ХОТЯ

ОНИ ОБА ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫ.



Линейная независимость

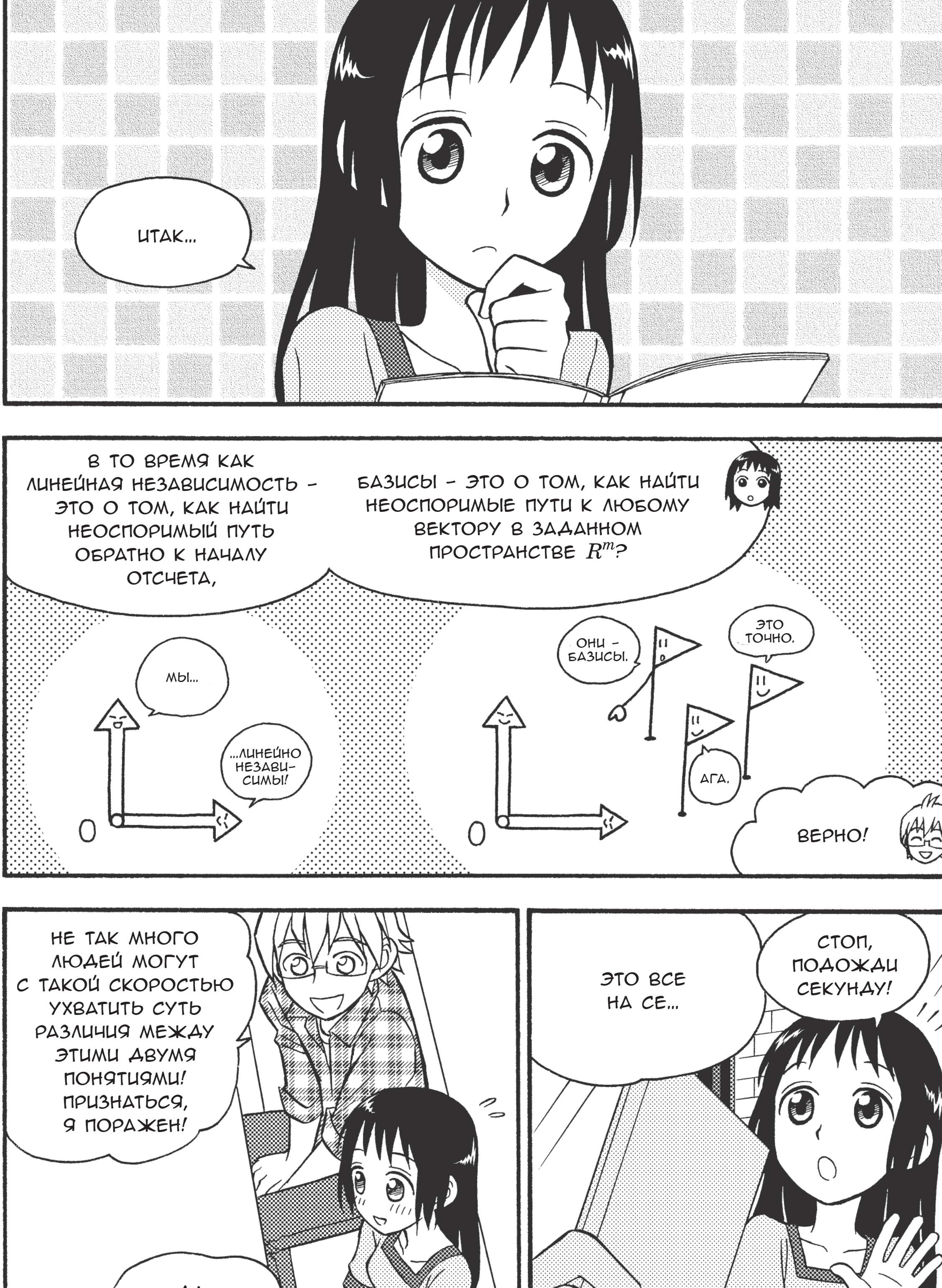
Мы говорим, что набор векторов $\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}$ линейно независим, если существует лишь одно решение $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ \quad\vdots \\ c_n = 0 \end{cases}$ уравнения

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

где левая часть – это нулевой вектор R^m.

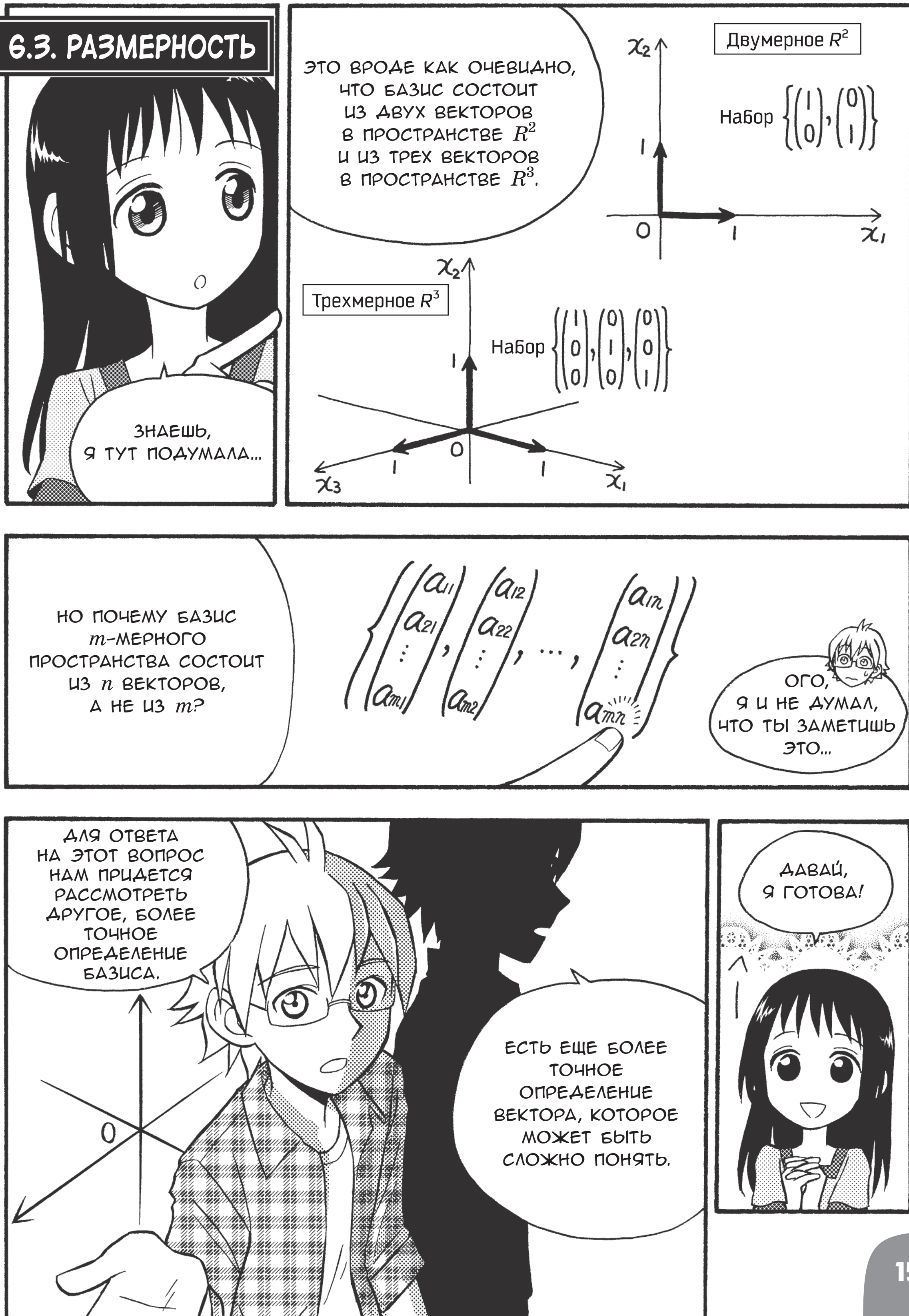
Базисы

Набор векторов $\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}$ образует базис, если существует только одно решение уравнения $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$, где левая часть – это произвольный вектор $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ в R^m. И снова базис – это минимальный набор векторов, необходимый для выражения произвольного вектора в R^m.



Итак...
В то время как линейная независимость – это о том, как найти неоспоримый путь обратно к началу отсчета,
базисы – это о том, как найти неоспоримые пути к любому вектору в заданном пространстве R^m?
Мы...
...линейно независимы!
0
0
Они – базисы.
Это точно.
Ага.
Верно!
Не так много людей могут с такой скоростью ухватить суть различия между этими двумя понятиями! Признаться, я поражен!
Да... подумаешь!
Это все на се...
Стоп, подожди секунду!

6.3. РАЗМЕРНОСТЬ



6.3.1. Подпространства

Что такое подпространство?

Пусть c – это произвольное действительное число, а W – это непустое множество R^m, удовлетворяющее таким двум условиям:

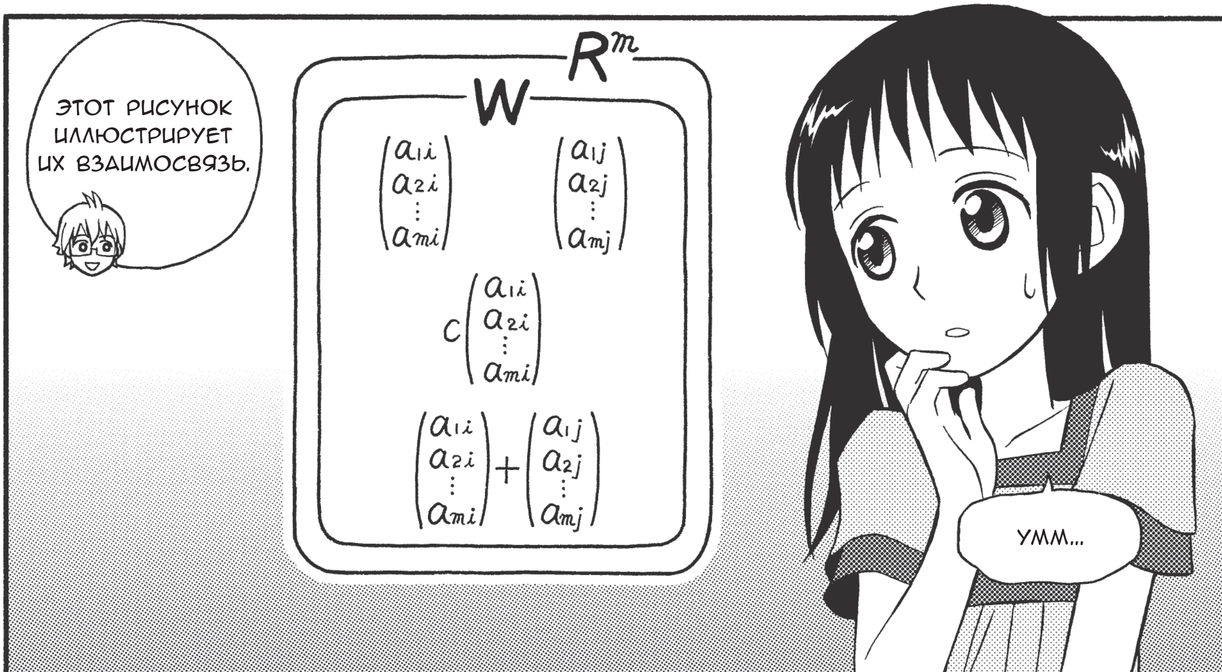
1) элемент в подмножестве W, умноженный на c, по-прежнему остается элементом подмножества W (закрыт под скалярным умножением):

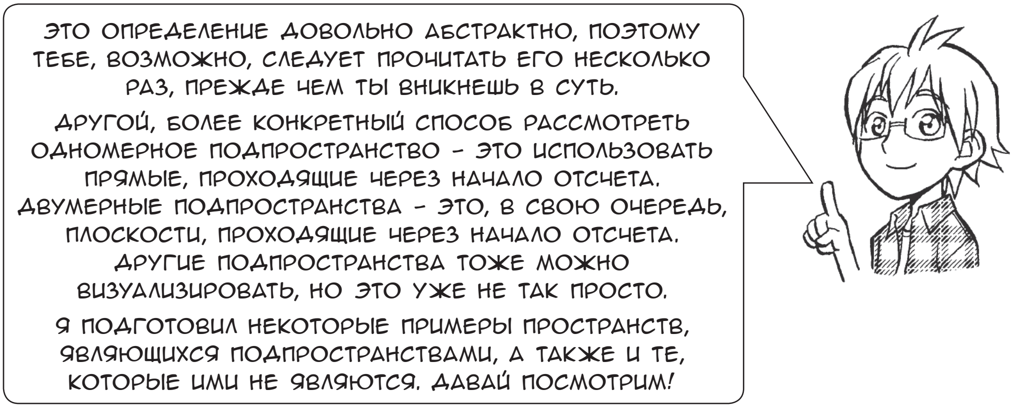
$$\text{если} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in W, \text{ то } c\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in W;$$

2) сумма двух произвольных элементов в подмножестве W является элементом этого подмножества (закрыто под сложением):

$$\text{если} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in W \text{ и } \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in W, \text{ то } \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in W.$$

Если выполняются оба этих условия, то W – это подмножество R^m.

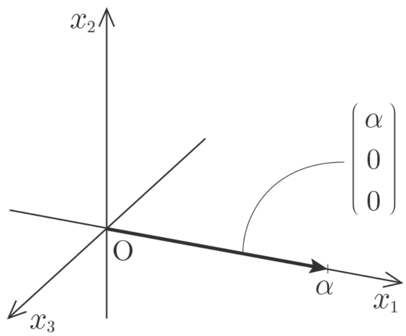




Это подпространство

Давай рассмотрим подпространство в R^3, заданное набором

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \alpha - \text{произвольное} \\ \text{действительное} \\ \text{число} \end{array} \right\},$$ другими словами – ось x.



Если это действительно подпространство, оно должно удовлетворять тем двум условиям, о которых мы говорили выше:

1) $$c \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \alpha - \text{произвольное} \\ \text{действительное} \\ \text{число} \end{array} \right\};$$

2) $$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \alpha - \text{произвольное} \\ \text{действительное} \\ \text{число} \end{array} \right\}.$$

Похоже, оно удовлетворяет обоим условиям! Значит, это – действительно подпространство.

Это не подпространство

Набор $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \alpha \text{ – произвольное} \\ \text{действительное} \\ \text{число} \end{array} \right\}$ не является подпространством R^3.

Давай с помощью наших условий посмотрим, почему так получается:

1) $c\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ {\alpha_1}^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\alpha_1 \\ c{\alpha_1}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} c\alpha_1 \\ (c\alpha_1)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \alpha \text{ – произвольное} \\ \text{действительное} \\ \text{число} \end{array} \right\}$;

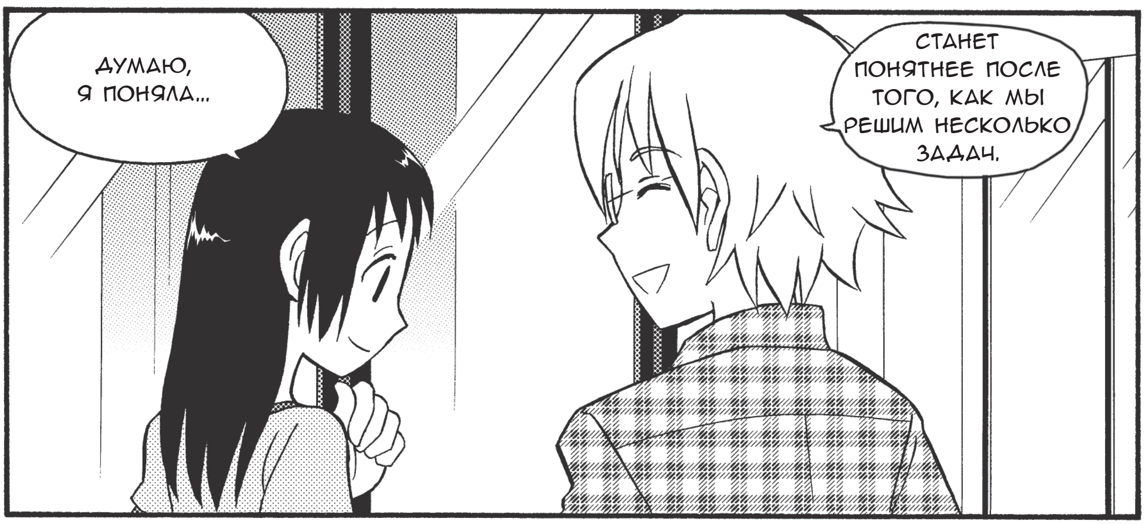
2) $c\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ {\alpha_1}^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\alpha_1 \\ c{\alpha_1}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} c\alpha_1 \\ (c\alpha_1)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \alpha \text{ – произвольное} \\ \text{действительное} \\ \text{число} \end{array} \right\}$.

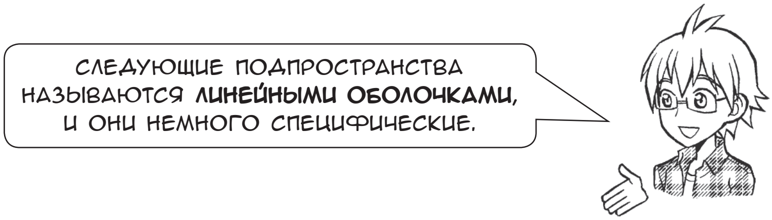
Похоже, данный набор не удовлетворяет ни одному из двух условий, а значит, это не подпространство!

НАВЕРНОЕ, ТЫ МОЖЕШЬ ПОДУМАТЬ, ЧТО “ОБА УСЛОВИЯ ВЫПОЛНЯЮТСЯ, ЕСЛИ МЫ ПРИМЕНИМ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, ПОЭТОМУ ДОЛЖНО ПОЛУЧИТЬСЯ ПОДПРОСТРАНСТВО”?!

ВЕРНО, ЧТО ДЛЯ ЭТИХ ЗНАЧЕНИЙ УСЛОВИЯ ВЫПОЛНЯЮТСЯ, НО, ТАК КАК ЭТИ УСЛОВИЯ ДОЛЖНЫ ВЫПОЛНЯТЬСЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, ТО ЕСТЬ ДЛЯ **ВСЕХ** ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, ТО НЕДОСТАТОЧНО ПРОВЕРКИ С НЕСКОЛЬКИМИ ВЫБРАННЫМИ ЧИСЛАМИ. НАБОР ВЕКТОРОВ ЯВЛЯЕТСЯ ПОДПРОСТРАНСТВОМ, ТОЛЬКО ЕСЛИ ВЫПОЛНЯЮТСЯ ОБА УСЛОВИЯ ДЛЯ ВСЕХ ТИПОВ ВЕКТОРОВ.

ЕСЛИ ТЫ ВСЕ ЕЩЕ НЕ МОЖЕШЬ УЛОВИТЬ СМЫСЛ, НЕ ОТЧАИВАЙСЯ! ЭТО ДЕЙСТВИТЕЛЬНО НЕПРОСТО!





Что такое линейная оболочка?

Мы говорим, что набор m-мерных векторов $\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}$

порождает следующее подпространство в R^m:

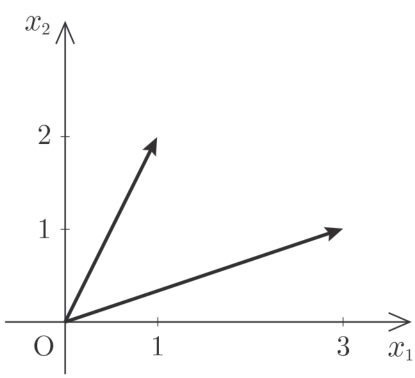
$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} c_1,\ c_2 \text{ и } c_n \text{ –} \\ \text{произвольные} \\ \text{числа} \end{array} \right\}.$$

Этот набор образует подпространство и называется линейной оболочкой n первоначальных векторов.

Пример 1

Плоскость x_1x_2 – это подпространство R^2, и оно может, к примеру, быть образовано при помощи двух векторов $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ так, что

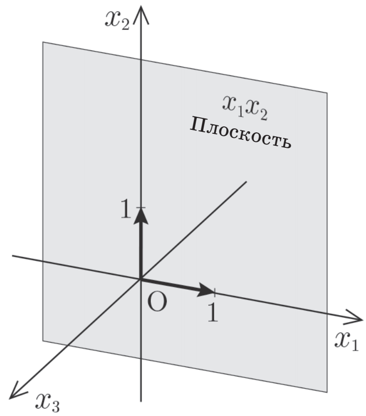
$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} c_1 \text{ и } c_2 \text{ –} \\ \text{произвольные} \\ \text{числа} \end{array} \right\}.$$



Пример 2

Плоскость x_1x_2, возможно, является подпространством R^3, и мы можем ее воспроизвести, используя векторы $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, создающие такой набор:

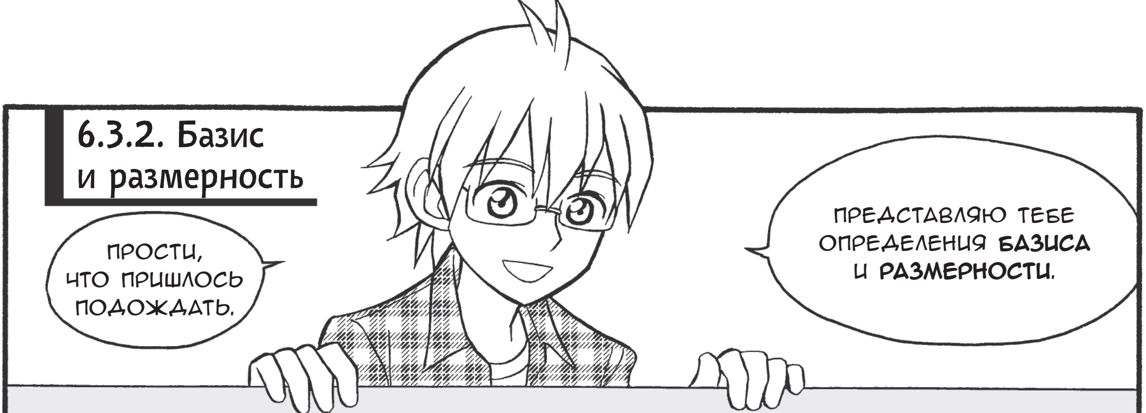
$$\left\{ c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l}c_1 \text{ и } c_2 \text{ –}\\ \text{произвольные}\\ \text{числа}\end{array} \right\}.$$



R^m – ЭТО ТАКЖЕ ПОДПРОСТРАНСТВО САМОГО СЕБЯ, КАК ТЫ, ВОЗМОЖНО, ДОГАДАЛАСЬ ИЗ ПРИМЕРА 1.

ВСЕ ПОДПРОСТРАНСТВА СОДЕРЖАТ НУЛЕВОЙ МНОЖИТЕЛЬ, КОТОРЫЙ ТЫ, ВОЗМОЖНО, РАЗЛИЧИШЬ В ПРИМЕРЕ НА СТР. 158. НЕ ЗАБУДЬ, ЧТО ОНИ ДОЛЖНЫ ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ НАЧАЛО ОТСЧЕТА! $\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

6.3.2. Базис и размерность



Что такое базис и размерность?

Предположим, что W – это подпространство R^m и что оно порождается линейно независимыми векторами $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$.

Это также можно записать следующим образом:

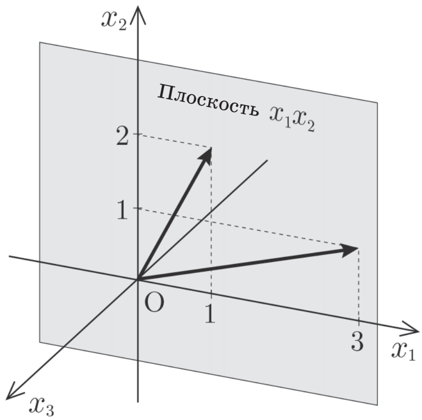
$$W = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} c_1,\ c_2 \text{ и } c_n \text{ –} \\ \text{произвольные} \\ \text{числа} \end{array} \right\}.$$

Когда это равенство выполняется, мы говорим, что набор $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}$ образует **базис** к подпространству W.

Размерность подпространства W равняется числу векторов в любом базисе для W.

Пример

Давай плоскость x_1x_2 назовем W, для упрощения. Итак, предположим, что W – это подпространство R^3, и оно образовано линейно независимыми векторами $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

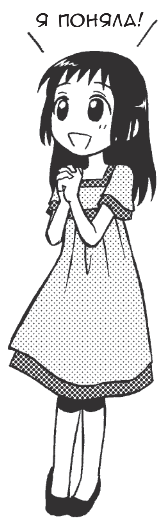


Получаем следующее:

$$W = \left\{ c_1\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} c_1 \text{ и } c_2 \text{ –} \\ \text{произвольные} \\ \text{числа} \end{array} \right\}.$$

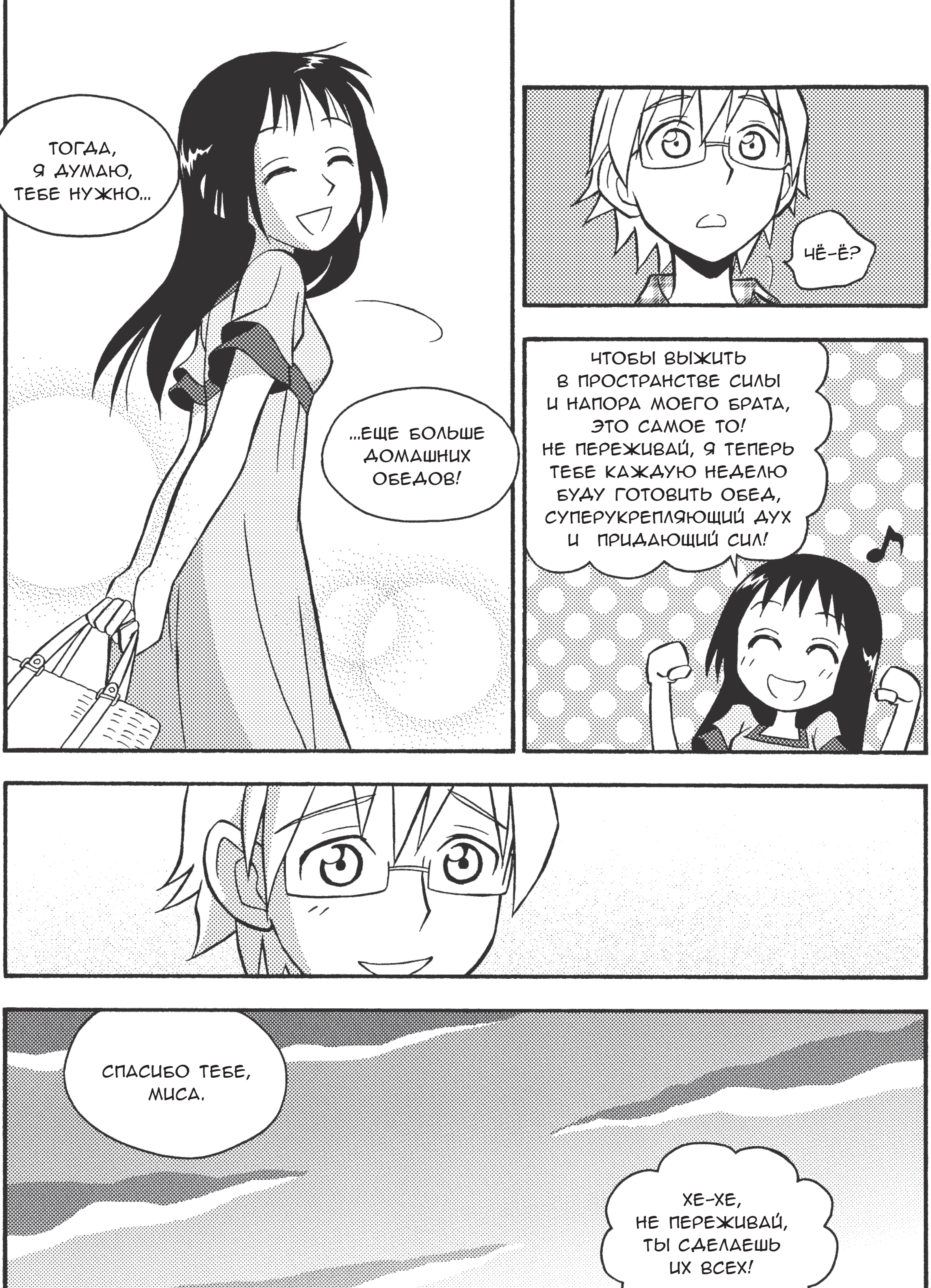
Тот факт, что это равенство выполняется, означает, что данный набор векторов $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$ является базисом подпространства W.

Так как базис содержит два вектора, то $\dim W = 2$.



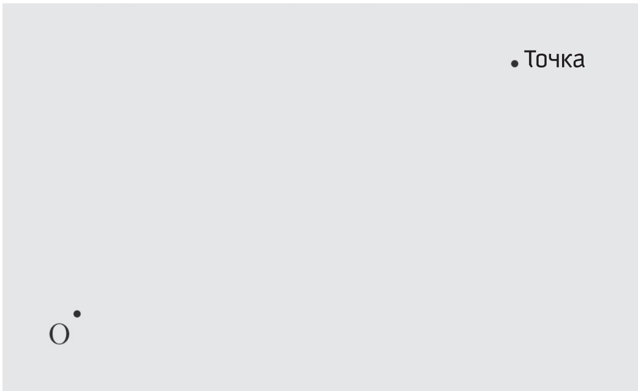

ТЫ УСПЕВАЕШЬ ЗА МНОЙ?
КОНЕЧНО!
Три измерения
Если базис подпространства имеет два вектора, тогда размерность подпространства должна быть равна двум
ПОЛУЧАЕТСЯ ТАК, ВЕРНО?
ТОЧНО!
НА СЕГОДНЯ ХВАТИТ.
Как всегда, весело!
СПАСИБО ТЕБЕ ЗА ПОМОЩЬ.
О ЛИНЕЙНЫХ ТРАНСФОРМАЦИЯХ ПОГОВОРИМ В СЛЕДУЮЩИЙ РАЗ.
ЭТО ТОЖЕ ВАЖНЫЙ ВОПРОС, ТАК ЧТО ГОТОВЬСЯ!
КОНЕЧНО!
О, НАМ, КАЖЕТСЯ, ПО ПУТИ...


...
МММ, Я НЕ ОТВЕТИЛ ТЕБЕ НА ВОПРОС...
?
Я ХОЧУ СТАТЬ СИЛЬНЕЕ. ТОГДА Я СМОГУ...
МНЕ НАДОЕЛО БЫТЬ СЛАБАКОМ.
Я ХОЧУ СТАТЬ СИЛЬНЕЕ.
ТОГДА Я СМОГУ...
НУ...


Тогда,
я думаю,
тебе нужно...
...еще больше
домашних
обедов!
Чё-ё?
Чтобы выжить в пространстве силы и напора моего брата, это самое то! Не переживай, я теперь тебе каждую неделю буду готовить обед, суперукрепляющий дух и придающий сил!
Спасибо тебе,
Миса.
Хе-хе,
не переживай,
ты сделаешь
их всех!

6.4. КООРДИНАТЫ

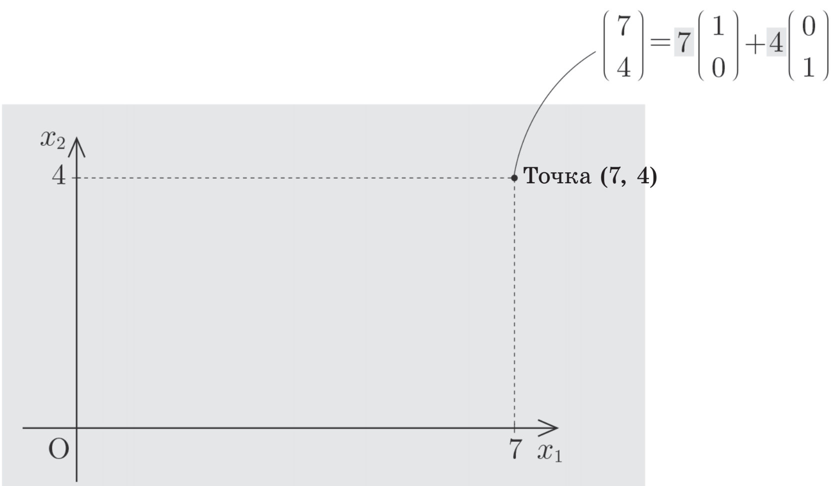
Координаты в линейной алгебре немного отличаются от координат, с которыми знакомятся в средней школе. Я попробую объяснить разницу между ними с помощью рисунка.



При работе с координатами и системами координат в школе намного проще использовать только нулевой базис:

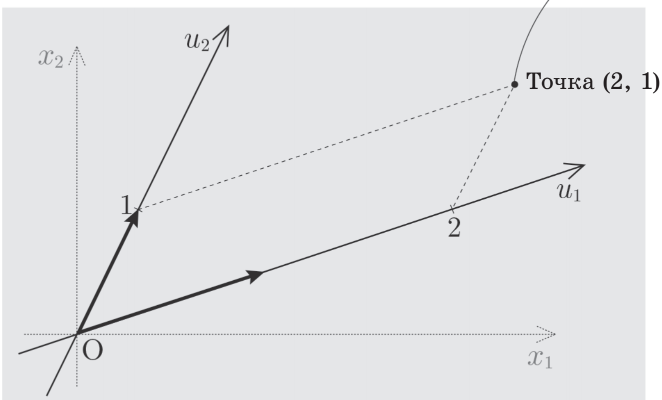
$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

В такого рода системе отношение между началом координат и точкой в верхнем правом углу интерпретируется следующим образом:



Важно понимать, что, когда мы входим в область линейной алгебры, нулевой базис – это лишь один из многочисленных базисов, и использование других базисов влечет за собой другие отношения между начальным отсчетом и заданной точкой. На данном ниже рисунке показана точка (2, 1) в некой системе, где есть ненулевой базис, состоящий из двух векторов $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

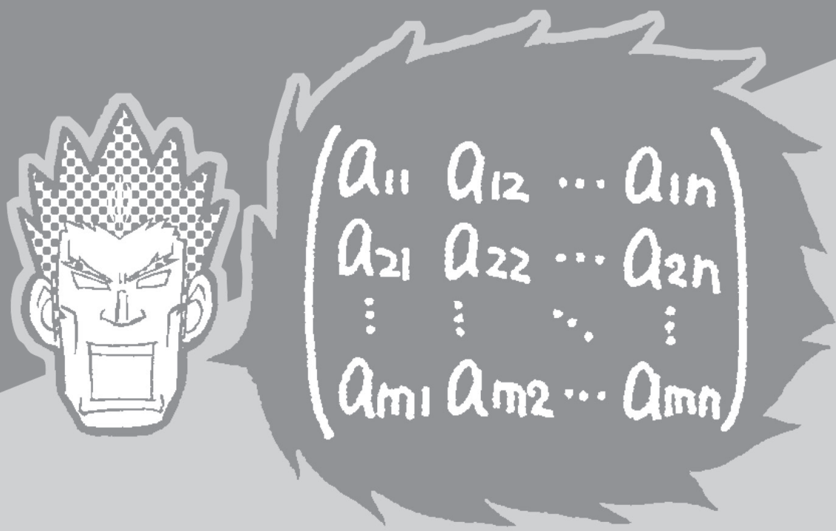
$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Этот альтернативный способ рассмотрения координат очень полезен для факторного анализа, к примеру.

ГЛАВА 7

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ




Что, у нас тренировочное состязание с университетом Нанху?
Верно! Через две недели будем выяснять, кто сильнее.
Состязание? Думаю, меня туда не возьмут.
Юурино!
Ты в команде.
Что?
Правда?
Сенсей, а не рано ли ему?
Ты что, будешь указывать мне, что делать?
Хлоп!
Нет! Что вы, нет, конечно!


Я очень хочу посмотреть, чему ты научился за это время!
Понятно?
Оссу!
Конечно, учитель!
Отлично. Свободны!
Состязание...
И что же мне делать...
Дрожь
Гони эти мысли! Он мне дал такую возмож-ность!
Я должен постараться изо всех сил.

7.1. ЧТО ТАКОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ?

Линейные преобразования

Пусть x_i и x_j – это два произвольных элемента, c – это произвольное натуральное число, а f – это функция от X к Y.

Мы говорим, что f – это линейное преобразование от X к Y, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $f(x_i) + f(x_j)$ и $f(x_i + x_j)$ равны;
2) $cf(x_i)$ и $f(cx_i)$ равны.

Линейные преобразования

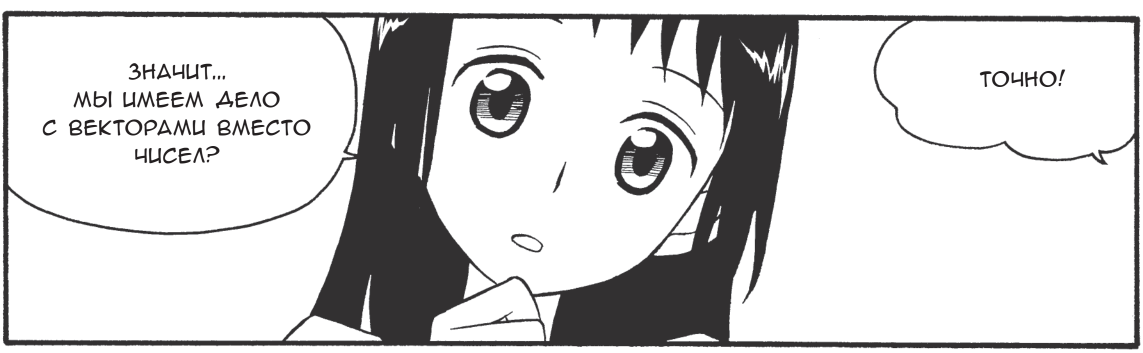
Пусть $\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ – это два произвольных элемента из R^n, c – произвольное действительное число, а f – это функция из R^n в R^m.

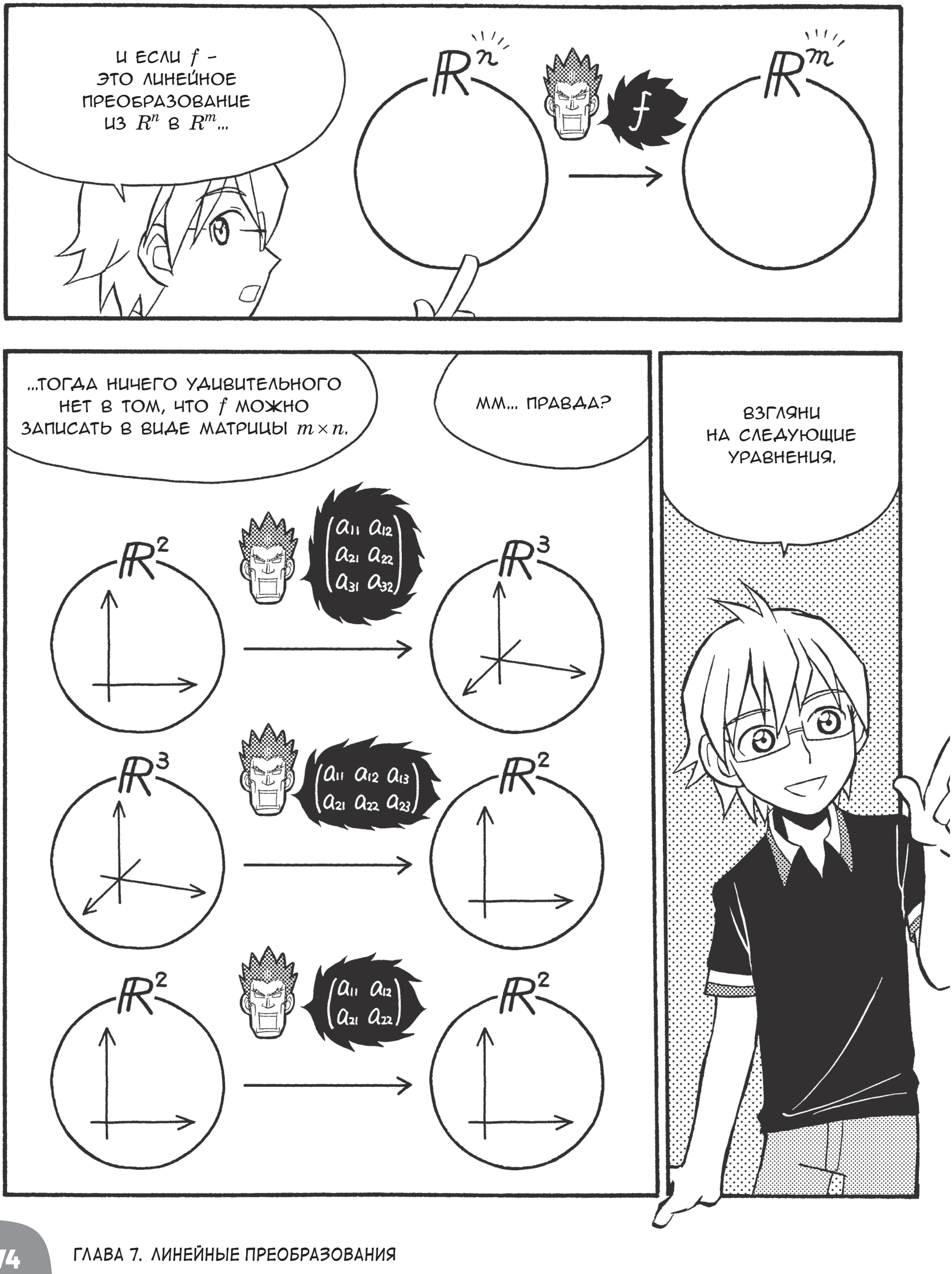
Мы говорим, что f – это линейное преобразование из R^n в R^m, если оно удовлетворяет двум следующим условиям:

1) $f\left(\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}\right)$ и $f\left(\begin{pmatrix} x_{1i} + x_{1j} \\ x_{2i} + x_{2j} \\ \vdots \\ x_{ni} + x_{nj} \end{pmatrix}\right)$ равны;

2) $cf\left(\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}\right)$ и $f\left(c\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}\right)$ равны.

Линейное преобразование из R^n в R^m иногда называют **линейной картой**, или **линейной операцией.**





И если f – это линейное преобразование из R^n в R^m...
$\mathbb{R}^n$
f
$\mathbb{R}^m$
...тогда ничего удивительного нет в том, что f можно записать в виде матрицы $m \times n$.
Мм... правда?
$\mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^3$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2$
Взгляни на следующие уравнения.

1. Мы сначала проверим первое правило: $f\left(\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_{1i} + x_{1j} \\ x_{2i} + x_{2j} \\ \vdots \\ x_{ni} + x_{nj} \end{pmatrix}\right)$.

Просто заменяем *f* матрицей и затем упрощаем:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\, x_{1i} + a_{12}\, x_{2i} + \cdots + a_{1n}\, x_{ni} \\ a_{21}\, x_{1i} + a_{22}\, x_{2i} + \cdots + a_{2n}\, x_{ni} \\ \vdots \\ a_{m1} x_{1i} + a_{m2} x_{2i} + \cdots + a_{mn} x_{ni} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}\, x_{1j} + a_{12}\, x_{2j} + \cdots + a_{1n}\, x_{nj} \\ a_{21}\, x_{1j} + a_{22}\, x_{2j} + \cdots + a_{2n}\, x_{nj} \\ \vdots \\ a_{m1} x_{1j} + a_{m2} x_{2j} + \cdots + a_{mn} x_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\,(x_{1i} + x_{1j}) + a_{12}\,(x_{2i} + x_{2j}) + \cdots + a_{1n}\,(x_{ni} + x_{nj}) \\ a_{21}\,(x_{1i} + x_{1j}) + a_{22}\,(x_{2i} + x_{2j}) + \cdots + a_{2n}\,(x_{ni} + x_{nj}) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_{1i} + x_{1j}) + a_{m2}(x_{2i} + x_{2j}) + \cdots + a_{mn}(x_{ni} + x_{nj}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1i} + x_{1j} \\ x_{2i} + x_{2j} \\ \vdots \\ x_{ni} + x_{nj} \end{pmatrix}.$$

2. Теперь второе правило: $cf\left(\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}\right) = f\left(c\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}\right)$.

И снова просто заменим *f* матрицей и упростим:

$$c\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} =$$

$$c\begin{pmatrix} a_{11}\, x_{1i} + a_{12}\, x_{2i} + \cdots + a_{1n}\, x_{ni} \\ a_{21}\, x_{1i} + a_{22}\, x_{2i} + \cdots + a_{2n}\, x_{ni} \\ \vdots \\ a_{m1} x_{1i} + a_{m2} x_{2i} + \cdots + a_{mn} x_{ni} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\,(cx_{1i}) + a_{12}\,(cx_{2i}) + \cdots + a_{1n}\,(cx_{ni}) \\ a_{21}\,(cx_{1i}) + a_{22}\,(cx_{2i}) + \cdots + a_{2n}\,(cx_{ni}) \\ \vdots \\ a_{m1}(cx_{1i}) + a_{m2}(cx_{2i}) + \cdots + a_{mn}(cx_{ni}) \end{pmatrix} =$$

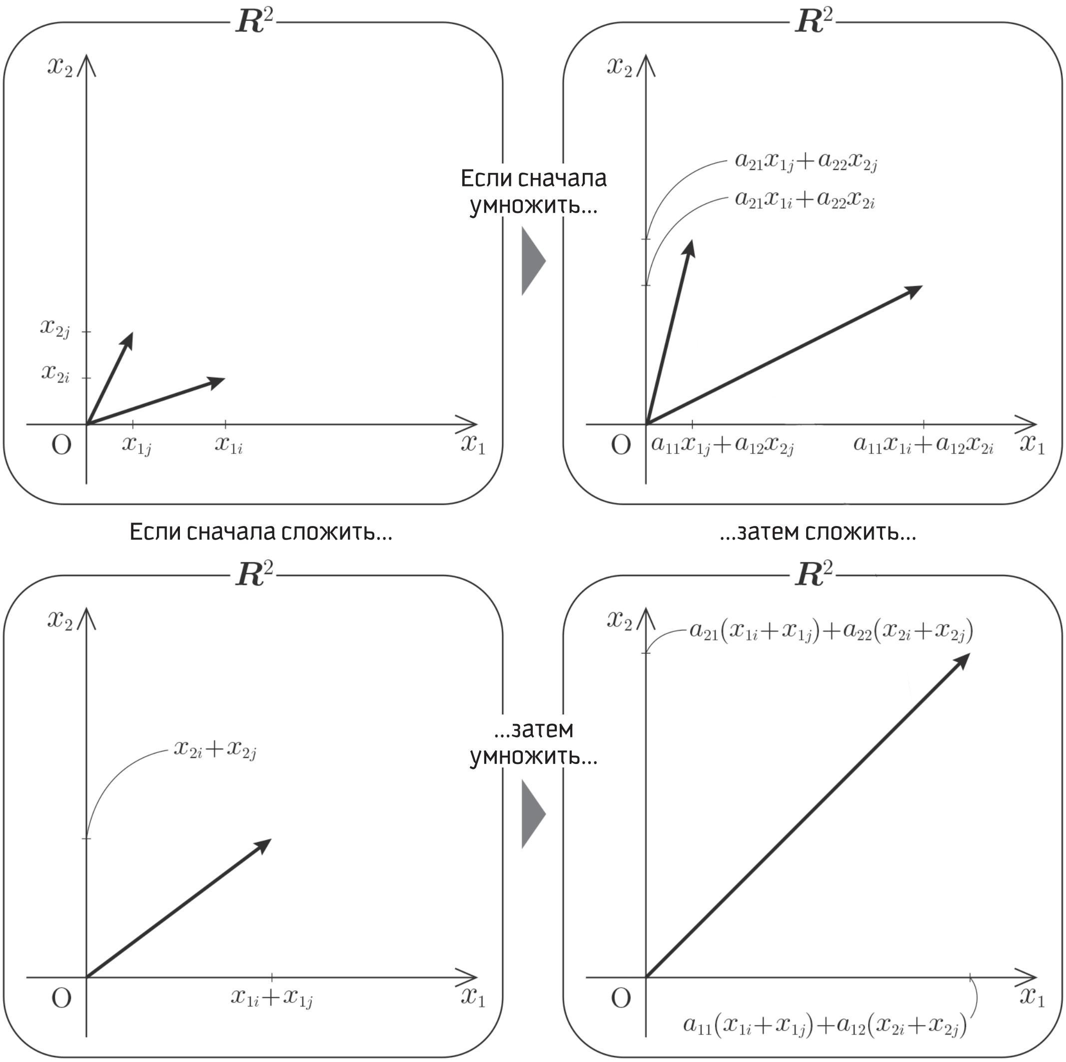
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cx_{1i} \\ cx_{2i} \\ \vdots \\ cx_{ni} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\left[c\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}\right].$$

Мы можем наглядно это продемонстрировать. Мы будем использовать матрицу 2×2 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ в качестве f.

1. Мы покажем, что первое правило справедливо:

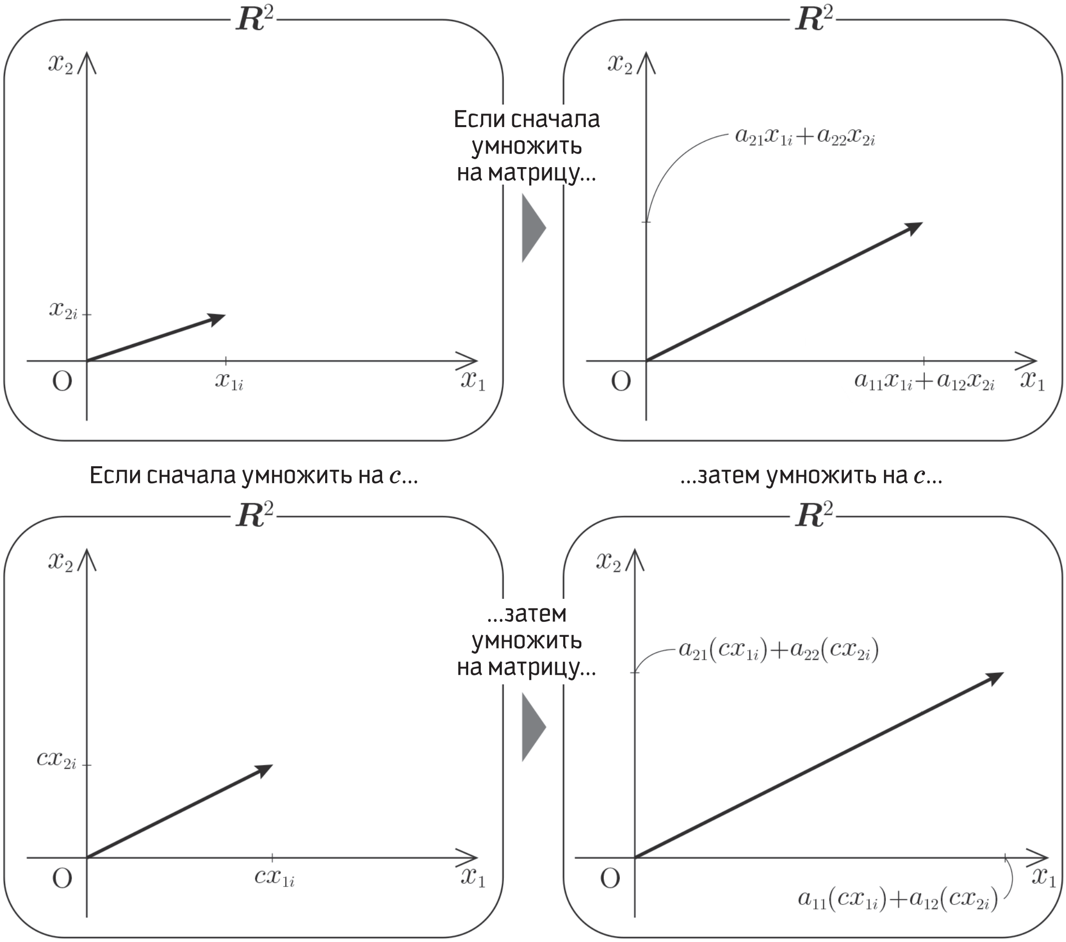
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1i} + x_{1j} \\ x_{2i} + x_{2j} \end{pmatrix}.$$



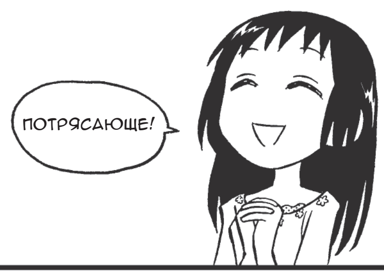
...результат будет один и тот же!

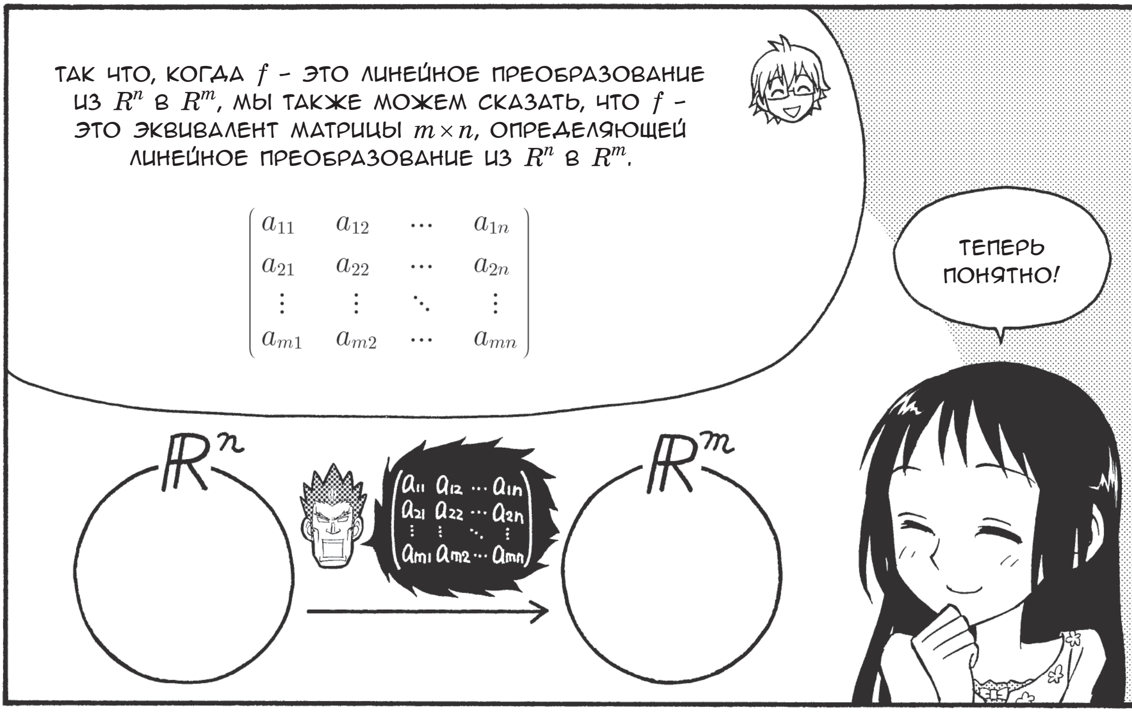
И второе правило тоже:

$$c\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\left[c\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{pmatrix}\right].$$

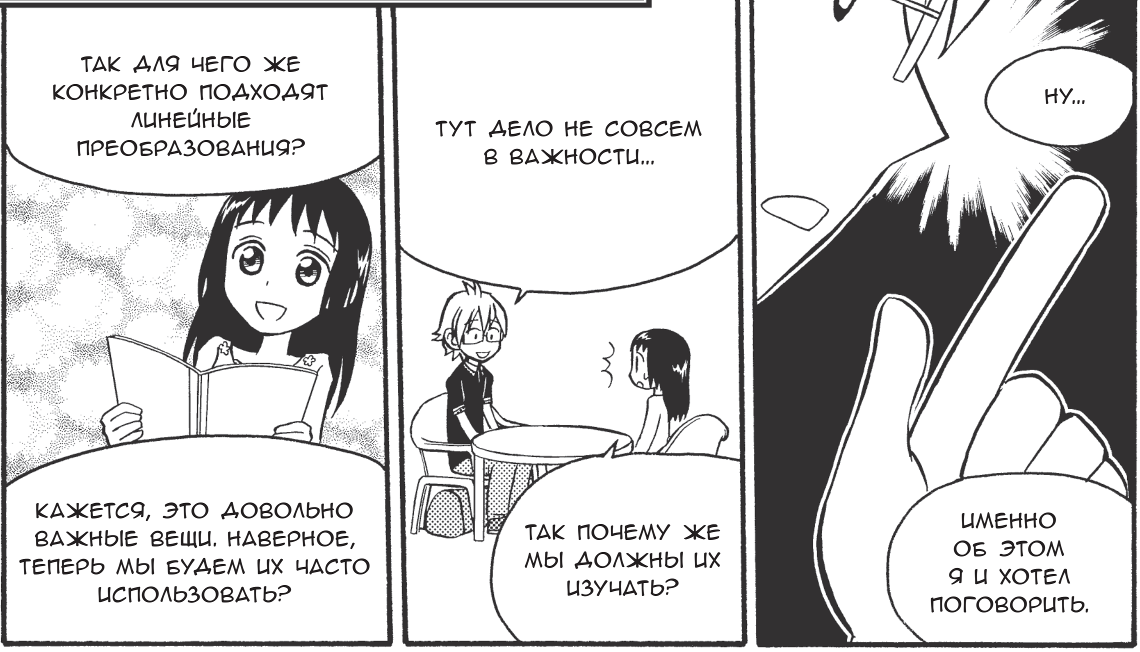


…результат будет один и тот же!





7.2. Почему мы изучаем линейные преобразования



Рассмотрим линейное преобразование из R^n в R^m, заданное следующей матрицей $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

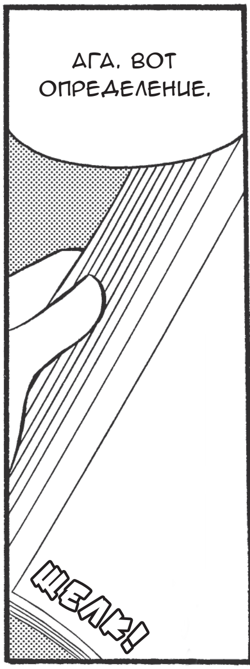
Если $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ – это образ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ под этим линейным преобразованием,

то следующее уравнение справедливо:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

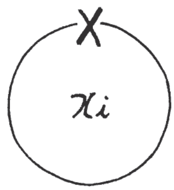
Образ?

Ага. Вот определение.



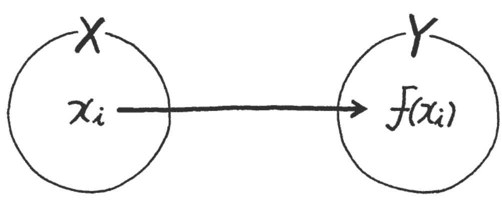
Образы

Предположим, что x_i – это элемент из множества X.

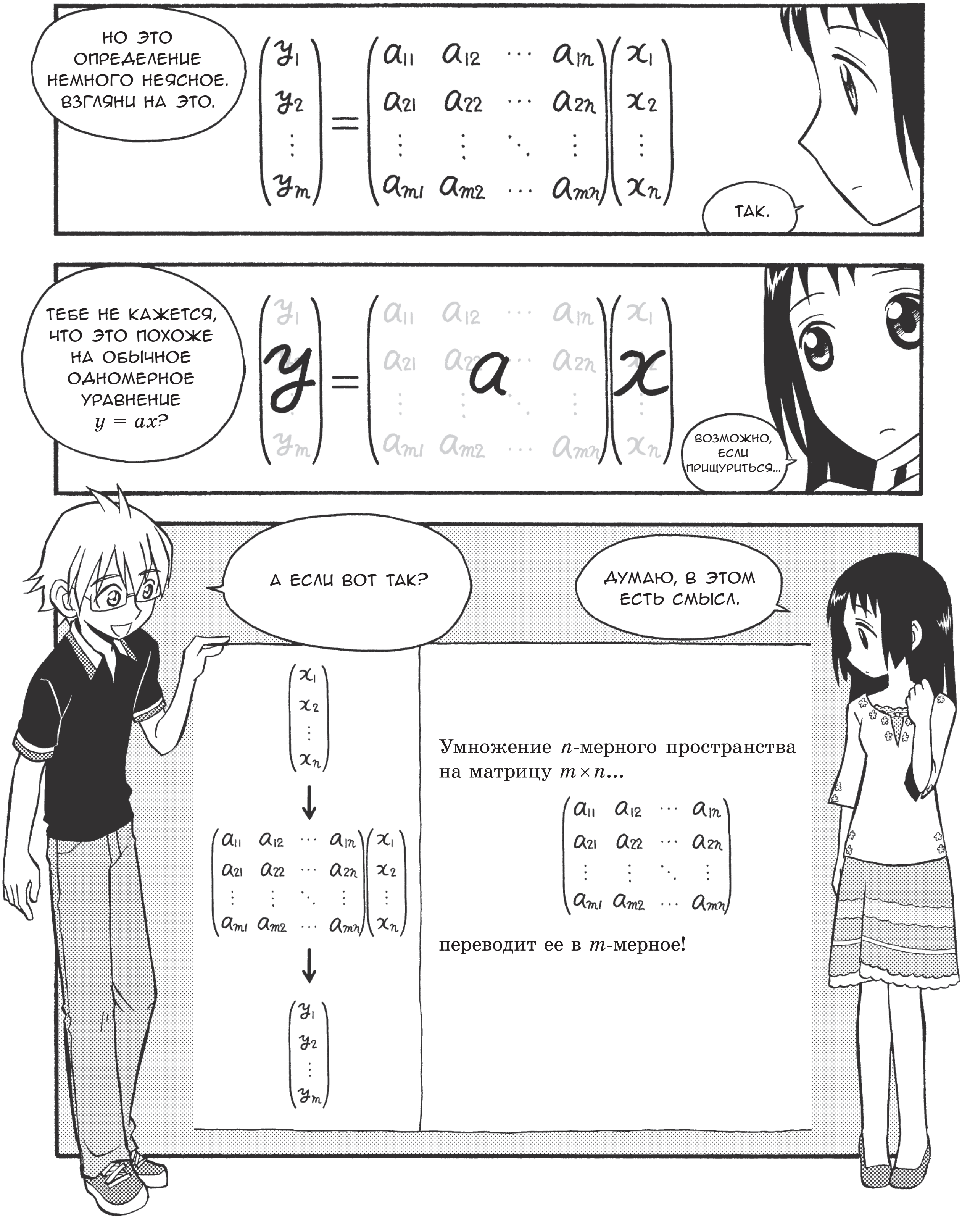


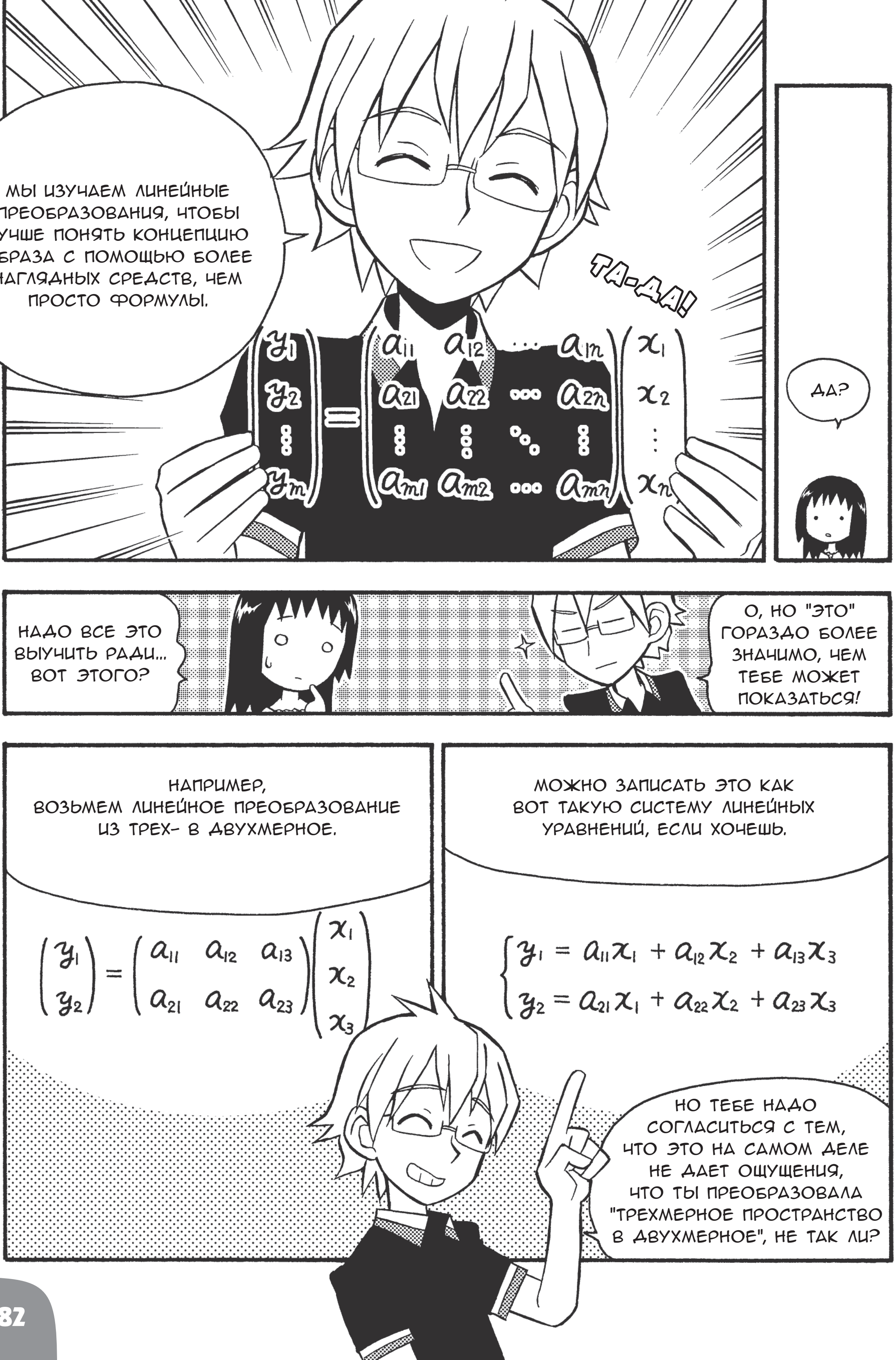
Мы уже говорили об этом раньше, не так ли?

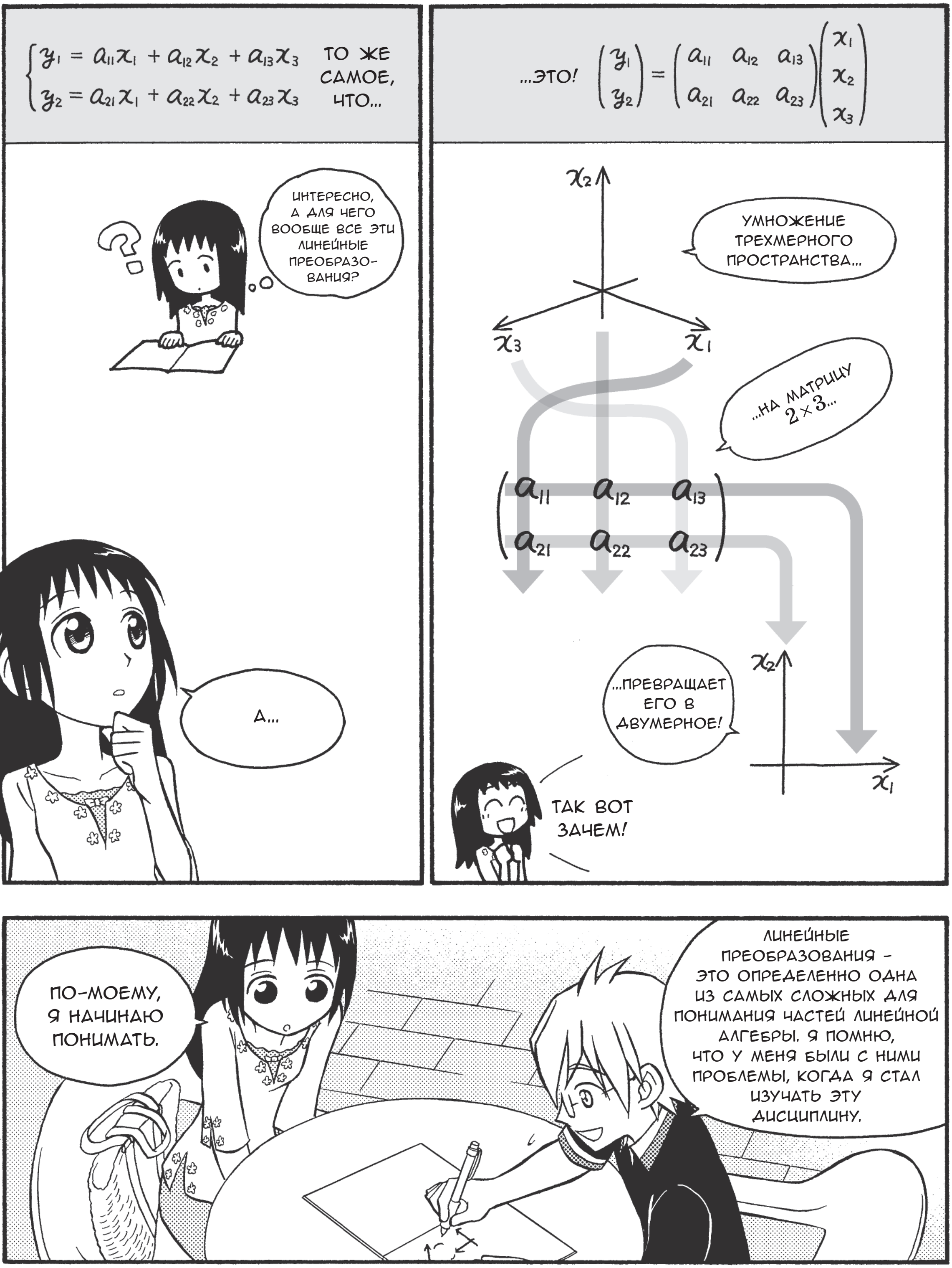
Элемент в множестве Y, соответствующий x_i под функцией f, называется образом x_i под f.



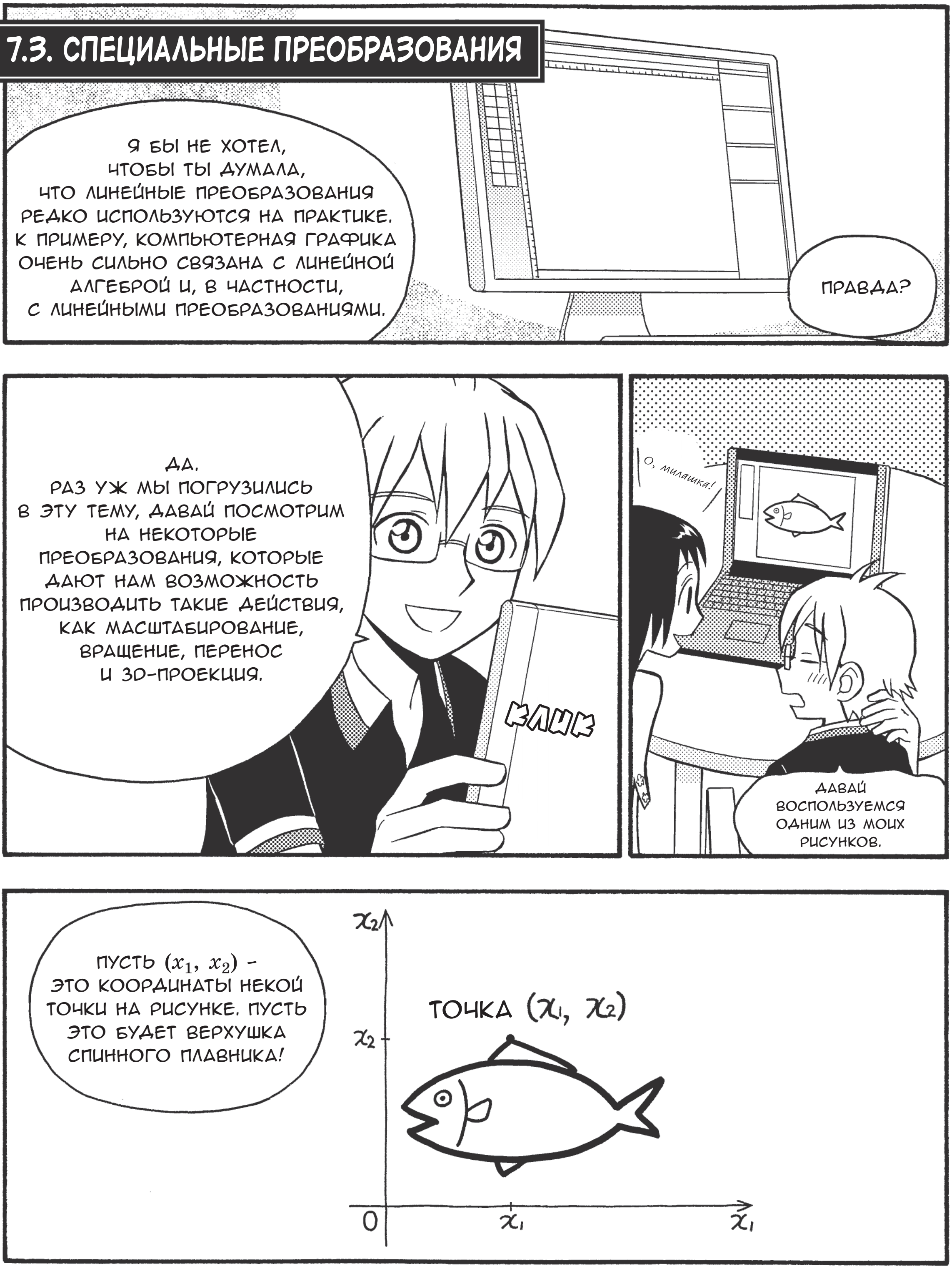
Да, во второй главе.


НО ЭТО ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕМНОГО НЕЯСНОЕ. ВЗГЛЯНИ НА ЭТО.
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
ТАК.
ТЕБЕ НЕ КАЖЕТСЯ, ЧТО ЭТО ПОХОЖЕ НА ОБЫЧНОЕ ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ $y = ax$?
$y = a\,x$
ВОЗМОЖНО, ЕСЛИ ПРИЩУРИТЬСЯ...
А ЕСЛИ ВОТ ТАК?
ДУМАЮ, В ЭТОМ ЕСТЬ СМЫСЛ.
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
$\downarrow$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
$\downarrow$
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$
Умножение n-мерного пространства на матрицу $m \times n$...
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
переводит ее в m-мерное!

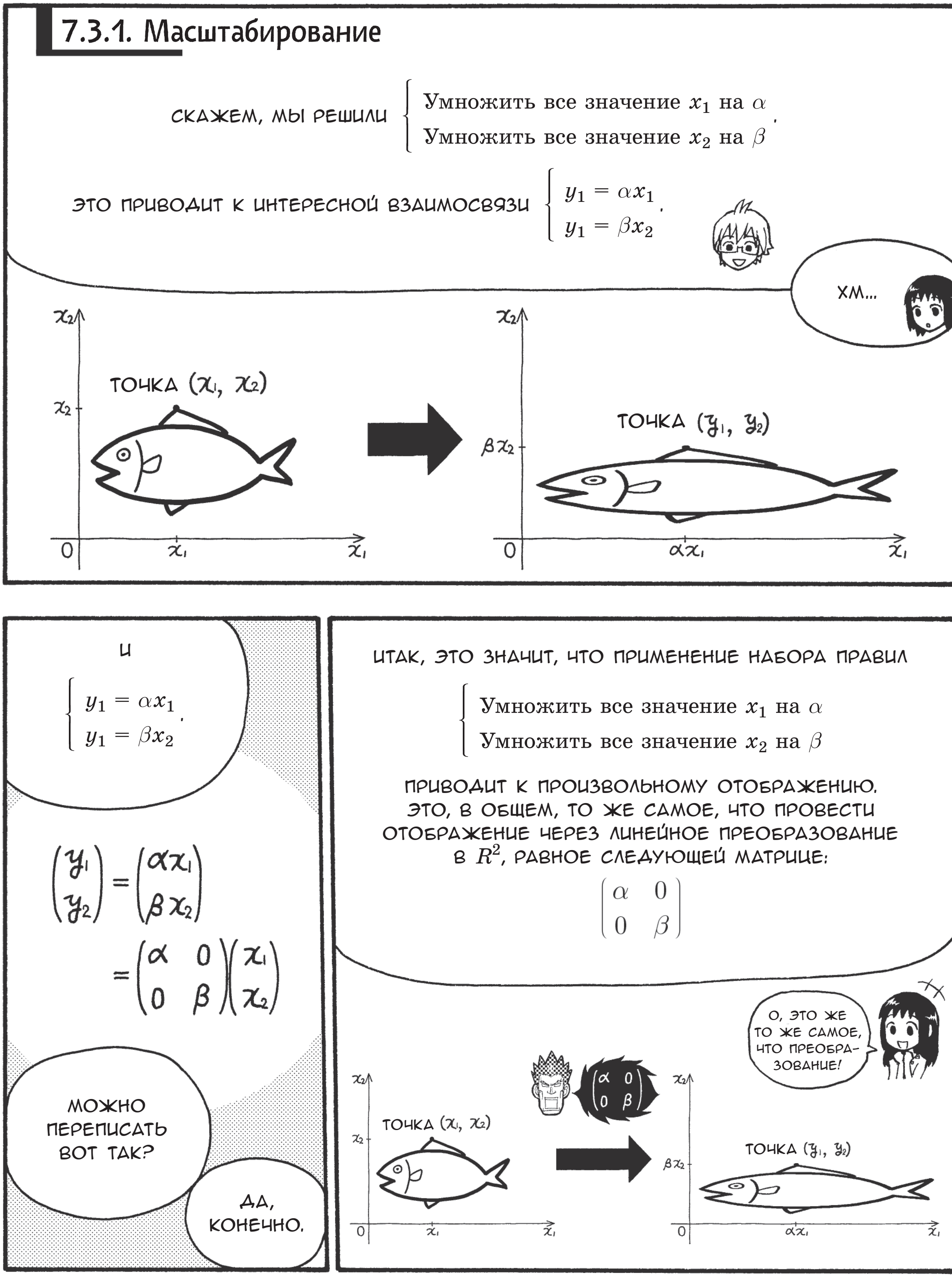

МЫ ИЗУЧАЕМ ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ЧТОБЫ ЛУЧШЕ ПОНЯТЬ КОНЦЕПЦИЮ ОБРАЗА С ПОМОЩЬЮ БОЛЕЕ НАГЛЯДНЫХ СРЕДСТВ, ЧЕМ ПРОСТО ФОРМУЛЫ.
ТА-ДА!
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
ДА?
НАДО ВСЕ ЭТО ВЫУЧИТЬ РАДИ... ВОТ ЭТОГО?
О, НО "ЭТО" ГОРАЗДО БОЛЕЕ ЗНАЧИМО, ЧЕМ ТЕБЕ МОЖЕТ ПОКАЗАТЬСЯ!
НАПРИМЕР, ВОЗЬМЕМ ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИЗ ТРЕХ- В ДВУХМЕРНОЕ.
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
МОЖНО ЗАПИСАТЬ ЭТО КАК ВОТ ТАКУЮ СИСТЕМУ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЕСЛИ ХОЧЕШЬ.
$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$$
НО ТЕБЕ НАДО СОГЛАСИТЬСЯ С ТЕМ, ЧТО ЭТО НА САМОМ ДЕЛЕ НЕ ДАЕТ ОЩУЩЕНИЯ, ЧТО ТЫ ПРЕОБРАЗОВАЛА "ТРЕХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО В ДВУХМЕРНОЕ", НЕ ТАК ЛИ?


$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$ ТО ЖЕ САМОЕ, ЧТО...
...ЭТО! $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
ИНТЕРЕСНО, А ДЛЯ ЧЕГО ВООБЩЕ ВСЕ ЭТИ ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ?
А...
x_2 x_3 x_1
УМНОЖЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА...
...НА МАТРИЦУ 2×3...
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$
x_2 x_1
...ПРЕВРАЩАЕТ ЕГО В ДВУМЕРНОЕ!
ТАК ВОТ ЗАЧЕМ!
ПО-МОЕМУ, Я НАЧИНАЮ ПОНИМАТЬ.
ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ – ЭТО ОПРЕДЕЛЕННО ОДНА ИЗ САМЫХ СЛОЖНЫХ ДЛЯ ПОНИМАНИЯ ЧАСТЕЙ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. Я ПОМНЮ, ЧТО У МЕНЯ БЫЛИ С НИМИ ПРОБЛЕМЫ, КОГДА Я СТАЛ ИЗУЧАТЬ ЭТУ ДИСЦИПЛИНУ.

7.3. Специальные преобразования

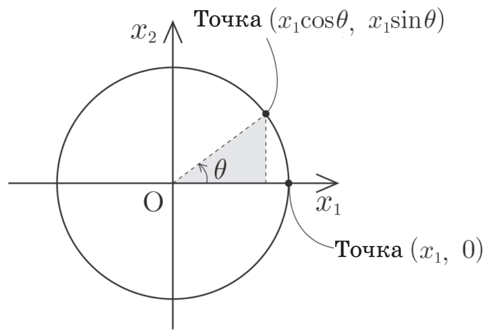


7.3.1. Масштабирование

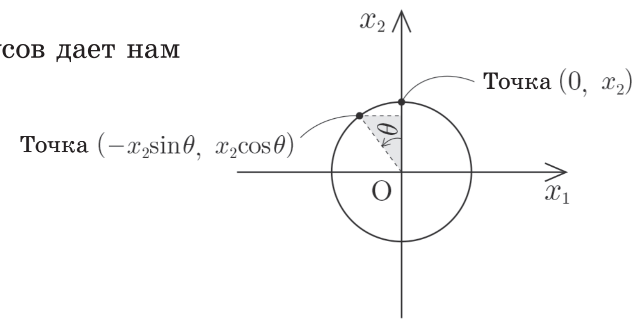


7.3.2. Вращение

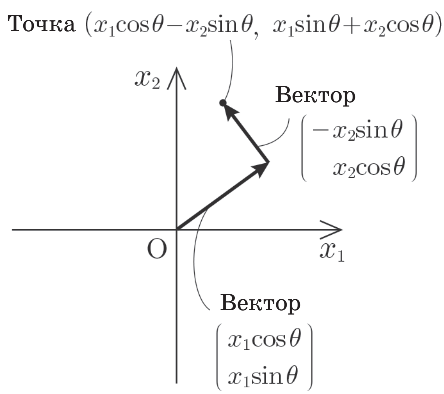
- Вращение $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ на θ градусов дает нам $\begin{pmatrix} x_1\cos\theta \\ x_1\sin\theta \end{pmatrix}$.

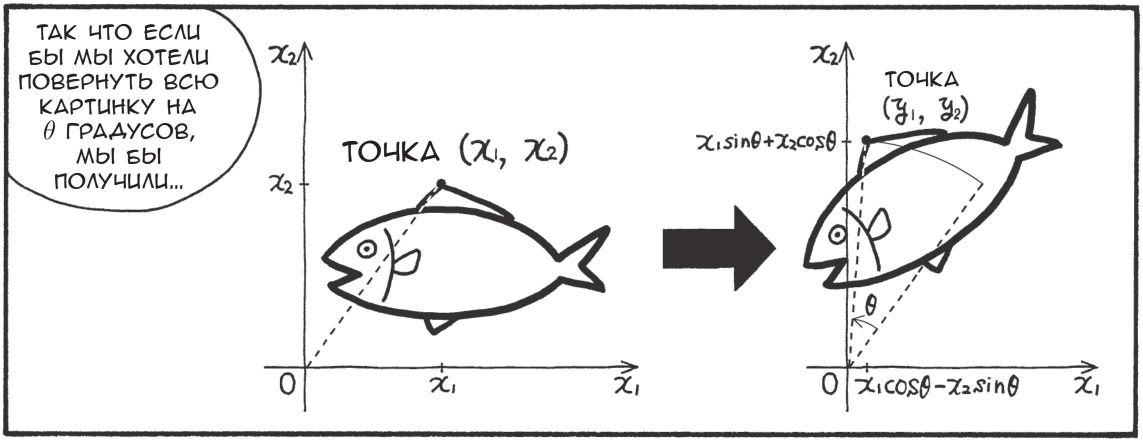


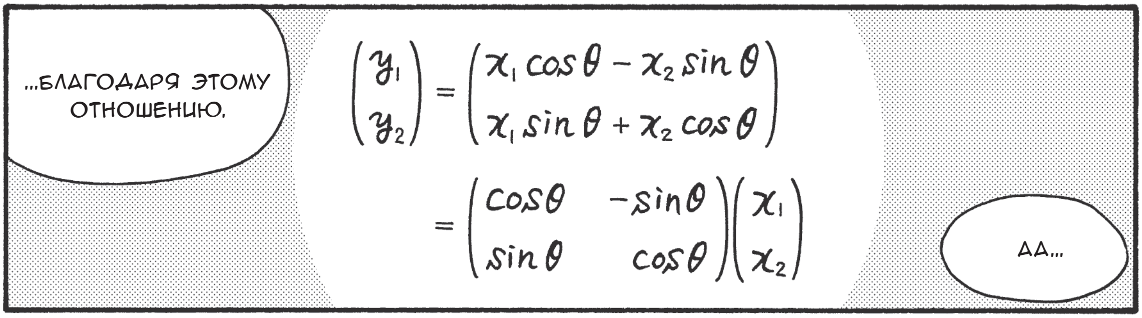
- Вращение $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ на θ градусов дает нам $\begin{pmatrix} -x_2\sin\theta \\ x_2\cos\theta \end{pmatrix}$.

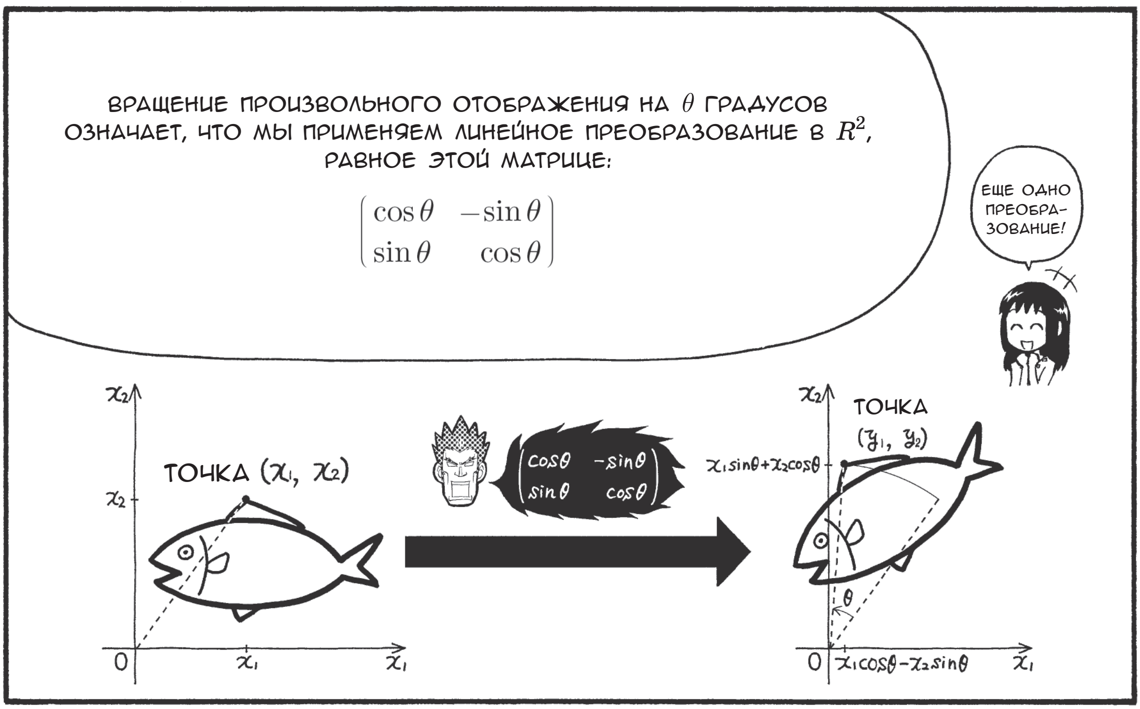


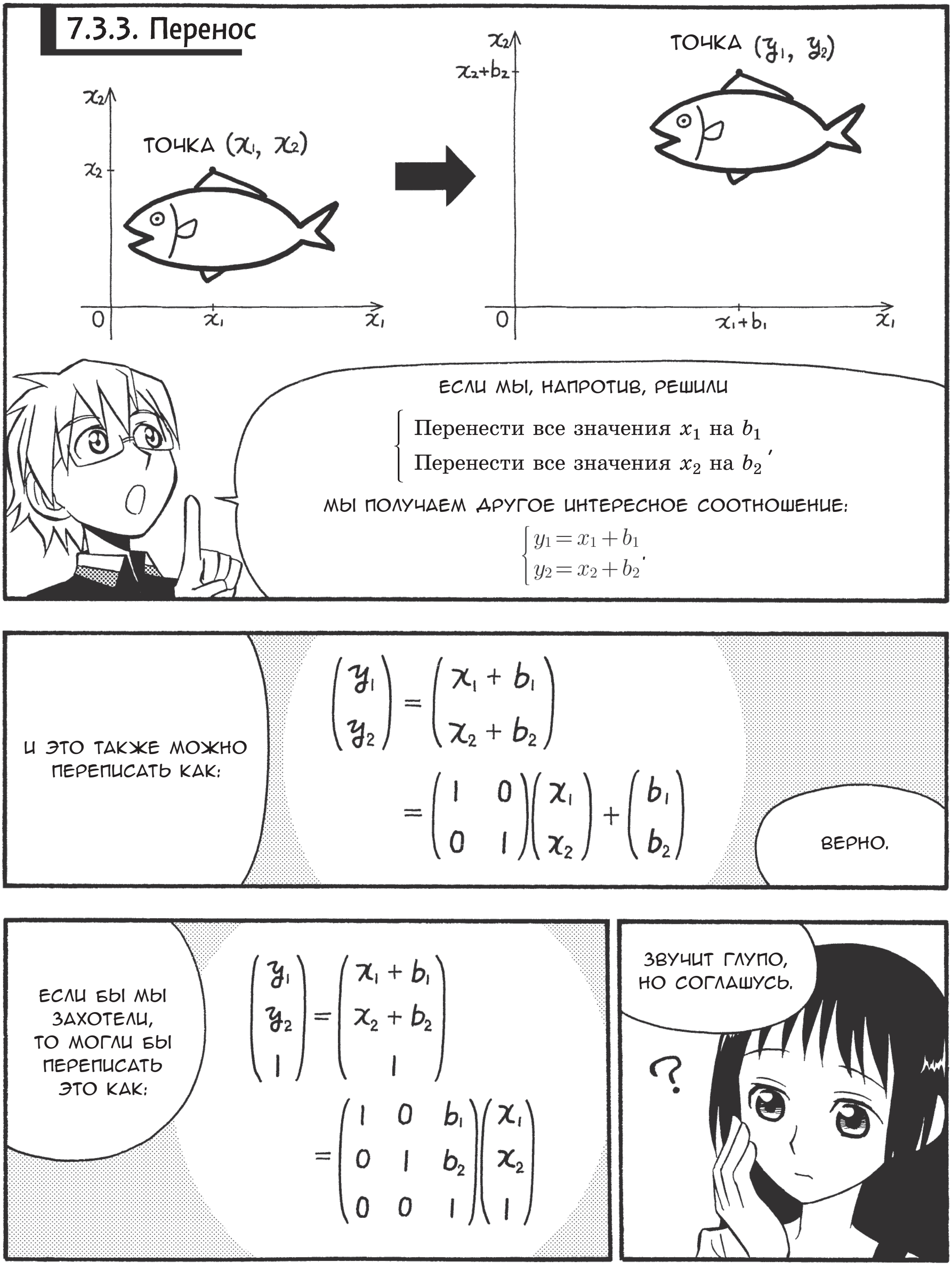
- Вращение $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, то есть $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$, на θ градусов дает нам $\begin{pmatrix} x_1\cos\theta \\ x_1\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2\sin\theta \\ x_2\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix}$.

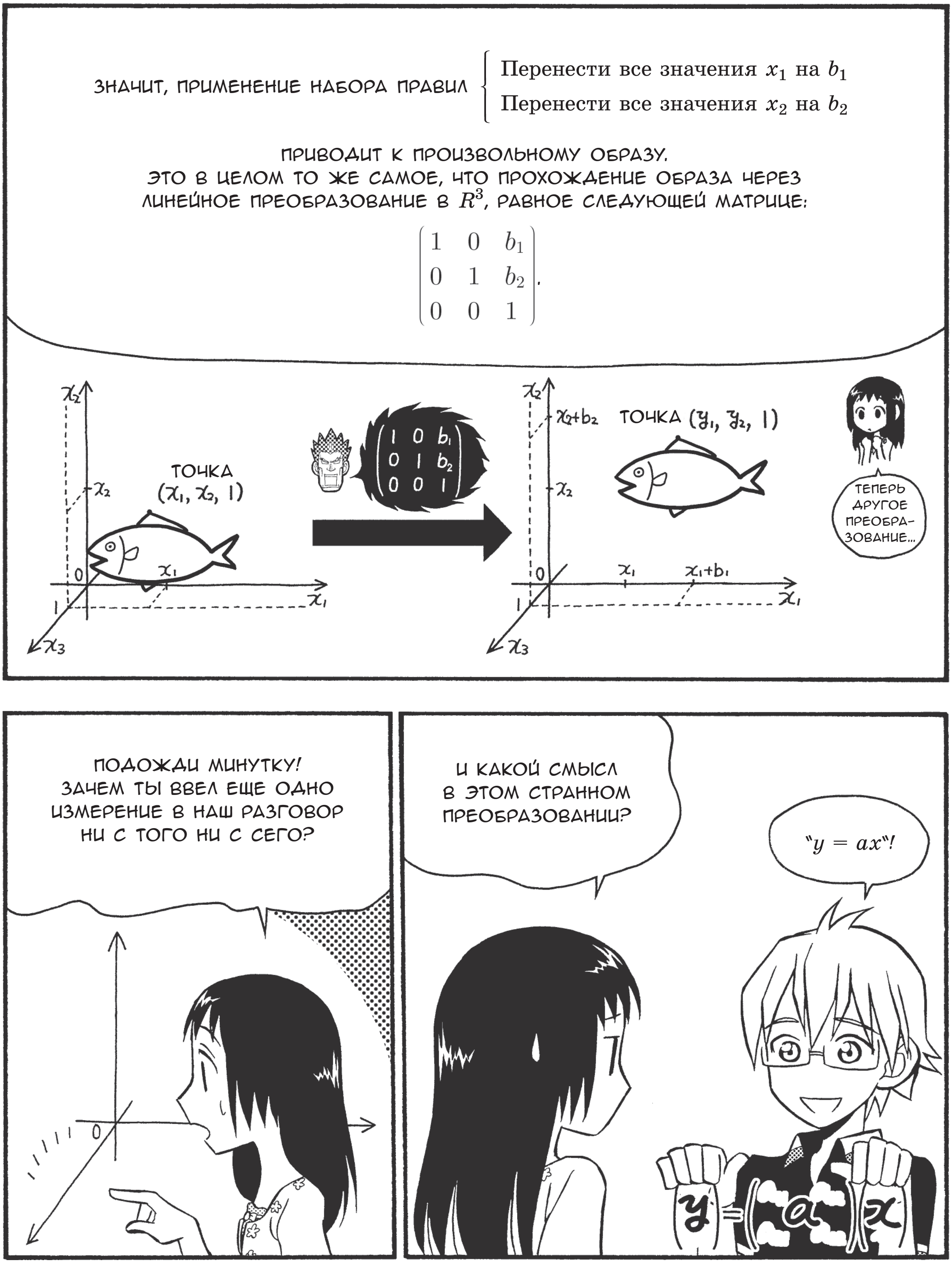


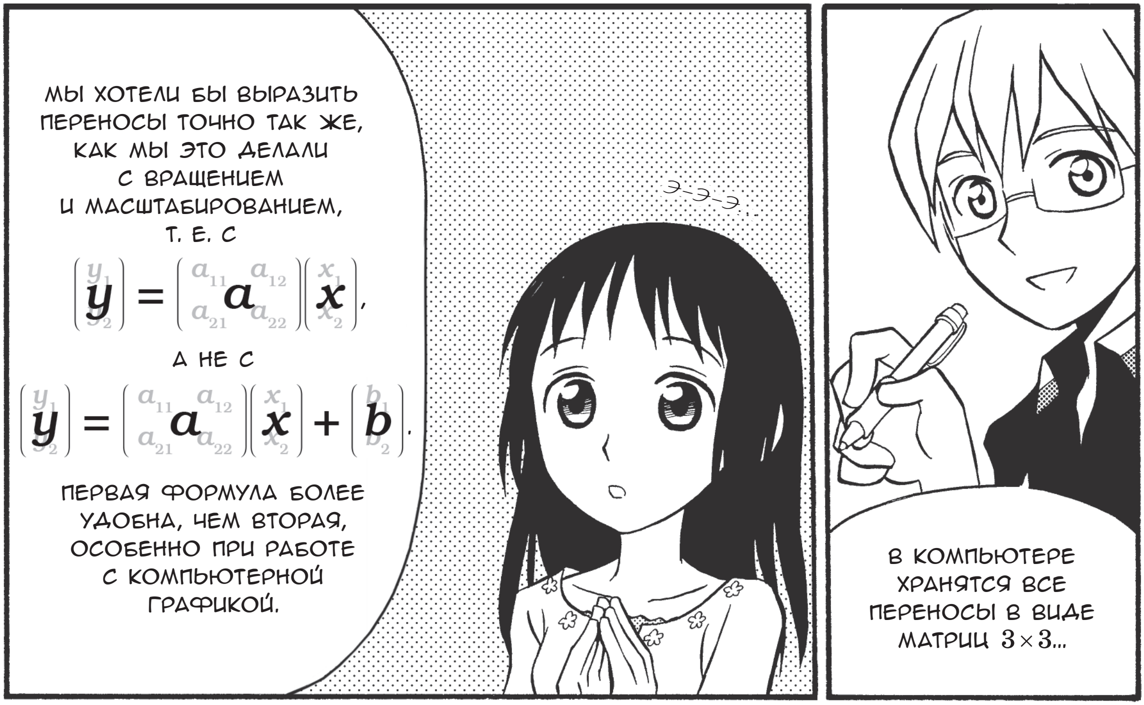

ТАК ЧТО ЕСЛИ БЫ МЫ ХОТЕЛИ ПОВЕРНУТЬ ВСЮ КАРТИНКУ НА θ ГРАДУСОВ, МЫ БЫ ПОЛУЧИЛИ...
ТОЧКА (x_1, x_2)
ТОЧКА (y_1, y_2)
x_2
x_1
0
$x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta$
$x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta$
θ


...БЛАГОДАРЯ ЭТОМУ ОТНОШЕНИЮ.
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \\ x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
ДА...


ВРАЩЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ НА θ ГРАДУСОВ ОЗНАЧАЕТ, ЧТО МЫ ПРИМЕНЯЕМ ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В R^2, РАВНОЕ ЭТОЙ МАТРИЦЕ:
$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
ЕЩЕ ОДНО ПРЕОБРАЗОВАНИЕ!
ТОЧКА (x_1, x_2)
$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
ТОЧКА (y_1, y_2)
$x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta$
$x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta$
θ


7.3.3. Перенос
ТОЧКА (x_1, x_2)
x_2
x_1
0
ТОЧКА (y_1, y_2)
x_2+b_2
x_1+b_1
ЕСЛИ МЫ, НАПРОТИВ, РЕШИЛИ
$\begin{cases} \text{Перенести все значения } x_1 \text{ на } b_1 \\ \text{Перенести все значения } x_2 \text{ на } b_2 \end{cases},$
МЫ ПОЛУЧАЕМ ДРУГОЕ ИНТЕРЕСНОЕ СООТНОШЕНИЕ:
$\begin{cases} y_1 = x_1 + b_1 \\ y_2 = x_2 + b_2 \end{cases}.$
И ЭТО ТАКЖЕ МОЖНО ПЕРЕПИСАТЬ КАК:
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ x_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$
ВЕРНО.
ЕСЛИ БЫ МЫ ЗАХОТЕЛИ, ТО МОГЛИ БЫ ПЕРЕПИСАТЬ ЭТО КАК:
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ x_2 + b_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$
ЗВУЧИТ ГЛУПО, НО СОГЛАШУСЬ.
?

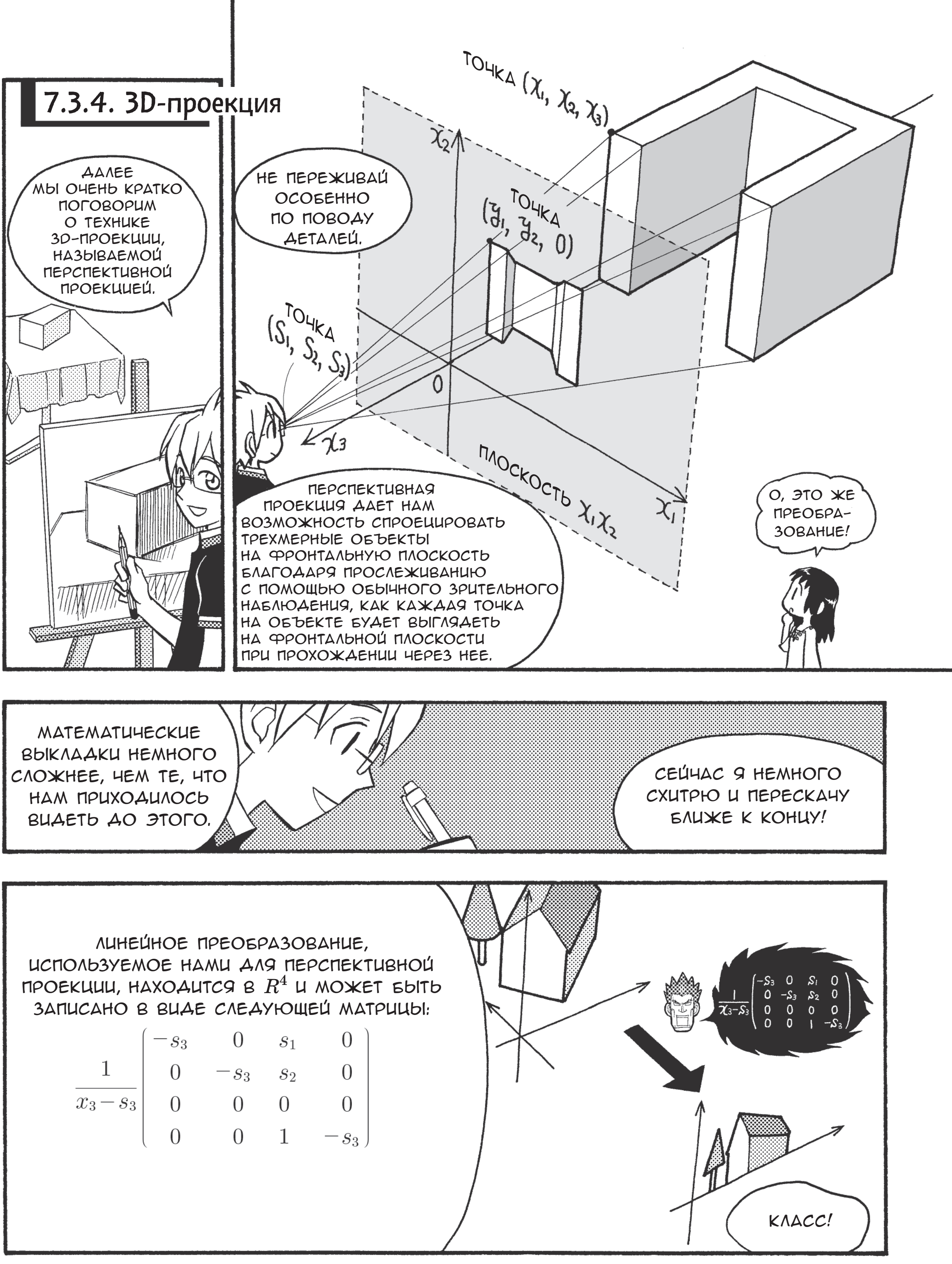

ЗНАЧИТ, ПРИМЕНЕНИЕ НАБОРА ПРАВИЛ
$\begin{cases} \text{Перенести все значения } x_1 \text{ на } b_1 \\ \text{Перенести все значения } x_2 \text{ на } b_2 \end{cases}$
ПРИВОДИТ К ПРОИЗВОЛЬНОМУ ОБРАЗУ.
ЭТО В ЦЕЛОМ ТО ЖЕ САМОЕ, ЧТО ПРОХОЖДЕНИЕ ОБРАЗА ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В R^3, РАВНОЕ СЛЕДУЮЩЕЙ МАТРИЦЕ:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
x_2
x_2
ТОЧКА $(x_1, x_2, 1)$
0
x_1
1
x_1
x_3
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
x_2
x_2+b_2
ТОЧКА $(y_1, y_2, 1)$
x_2
0
x_1
x_1+b_1
1
x_1
x_3
ТЕПЕРЬ ДРУГОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ...
ПОДОЖДИ МИНУТКУ! ЗАЧЕМ ТЫ ВВЕЛ ЕЩЕ ОДНО ИЗМЕРЕНИЕ В НАШ РАЗГОВОР НИ С ТОГО НИ С СЕГО?
0
И КАКОЙ СМЫСЛ В ЭТОМ СТРАННОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ?
"$y = ax$"!
$y = (a)x$



	Традиционные линейные преобразования	Линейные преобразования, используемые компьютерными графическими системами
Масштабирование	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Вращение	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Перенос	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^*$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

* Заметим: это на самом деле не линейное преобразование. Ты можешь убедиться в этом, установив b_1 и b_2 в 1 и проверив, что оба условия линейного преобразования не соблюдаются.

7.3.4. 3D-проекция




Так вот в чем весь смысл преобразований!
Так много учить...
Да... Но на сегодня хватит, я думаю.
Поговорим о собственных векторах и собственных числах на следующем, последнем занятии.
Последнее занятие?! Так быстро?
Не переживай, мы затронем все важные темы.
Хе, чего мне волноваться? Ты же такой хороший учитель.
Луч света
Знаешь, ты тоже не должен волноваться.
А?
Насчет соревнования.
О, ты слышала уже?
Да, мне брат рассказал.
Вжик
Хе. Спасибо. Я сейчас собираюсь в зал, вообще-то. Надеюсь, я проиграю не с разгромным счетом...


НЕЛЬЗЯ ТАК ГОВОРИТЬ!
НАДО ДУМАТЬ О ХОРОШЕМ!
Я ЗНАЮ, У ТЕБЯ ПОЛУЧИТСЯ.
СП... СПАСИБО...
БУДУ СТАРАТЬСЯ ИЗО ВСЕХ СИЛ.

7.4. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОДСКАЗКИ

Перед тем как перейти к ядру, рангу и другим сложным темам, которые мы собираемся рассмотреть в оставшейся части этой главы, обратим внимание на маленький математический трюк, который ты вряд ли обнаружишь, работая над какими-либо из этих вопросов.

Уравнение

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

можно переписать как:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \left[x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Как видишь, произведение матрицы M и вектора x можно рассматривать как линейную комбинацию столбцов матрицы M с входами x как весов.

Также надо заметить, что функция f, к которой мы обращаемся на протяжении всей главы, – это линейное преобразование из R^n в R^m, соответствующее следующей матрице $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

7.5. ЯДРО, ОБРАЗ И ТЕОРЕМА РАЗМЕРНОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Набор векторов, чьи образы – это нулевой вектор, то есть

$$\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\},$$

называются **ядром** линейного преобразования f и записываются как $\mathrm{Ker} f$.

Образ функции f (записывается как $\mathrm{Im} f$) – это тоже важное понятие в данном контексте. Образ f равен набору векторов, состоящих из всех возможных выходных значений f, как это можно видеть в следующем отношении:

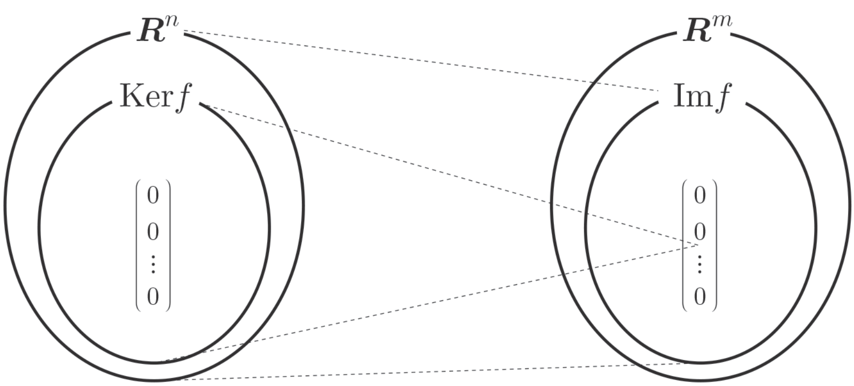
$$\left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\}.$$

(Это более формальное определение образа, чем то, что мы видели в главе 2, но принцип тот же.)

Важное наблюдение – это то, что $\mathrm{Ker} f$ – это подпространство R^n, а $\mathrm{Im} f$ – это подпространство R^m. Далее это наблюдение исследует теорема размерности для линейных преобразований с помощью определения отношения между этими двумя понятиями:

$$\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = n.$$

Заметим, что n равно размерности пространства первого вектора ($\dim R^n$)*.



* Если тебе нужно вспомнить, что такое размерность, смотри раздел 6.3.2 «Базис и размерность» на стр. 162.

Пример 1

Предположим, что f – это линейное преобразование из R^2 в R^2, равное матрице $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда:

$$\begin{cases} \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \boldsymbol{R}^2. \end{cases}$$

И:

$$\begin{cases} n & = 2 \\ \dim \operatorname{Ker} f & = 0. \\ \dim \operatorname{Im} f & = 2 \end{cases}$$

Пример 2

Предположим, что f – это линейное преобразование из R^2 в R^2, равное матрице $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда:

$$\begin{cases} \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [\, x_1 + 2x_2 \,] \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \\ \qquad \left\{ c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \text{ – произвольное число} \right\} \\ \operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = [\, x_1 + 2x_2 \,] \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \\ \qquad \left\{ c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \text{ – произвольное число} \right\} \end{cases}.$$

И:

$$\begin{cases} n & = 2 \\ \dim \operatorname{Ker} f & = 1. \\ \dim \operatorname{Im} f & = 1 \end{cases}$$

Пример 3

Предположим, что f – это линейное преобразование из R^2 в R^3, равное матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда:

$$\begin{cases} \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ \qquad \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c_1,\ c_2 - \text{произвольные числа} \right\} \end{cases}.$$

И:

$$\begin{cases} n & = 2 \\ \dim \operatorname{Ker} f & = 0 \\ \dim \operatorname{Im} f & = 2 \end{cases}.$$

Пример 4

Предположим, что f – это линейное преобразование из R^4 в R^2, равное матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда:

$$\begin{cases} \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\} = \\ \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \\ \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_1 + 3x_3 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \right\} = \\ \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c_1,\ c_2 \text{ – произвольные числа} \right\} \\ \operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\} = \\ \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \boldsymbol{R}^2 \end{cases}.$$

И:

$$\begin{cases} n & = 4 \\ \dim \operatorname{Ker} f & = 2 \\ \dim \operatorname{Im} f & = 2 \end{cases}.$$

7.6. РАНГ

Матрица $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ расписывается как.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \left[x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Далее следует читать на основании этого. Предположим, что отображение f в данном разделе основано на «линейном отображении из R^n в R^m, которое определено матрицей $m \times n$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$».

7.6.1. Ранг

Количество линейно независимых векторов в промежутке между вектором $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, вектором $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$ и вектором $\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$, либо размерность $\mathrm{Im}F$ линейного подпространства R^m называется «рангом матрицы $m \times n$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$».

Ранг матрицы $m \times n$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ обычно записывается как

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1

Линейную систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = y_1 \\ 1x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases}$, то есть $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 1x_2 \\ 1x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$, можно переписать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 1x_2 \\ 1x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Два вектора $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ линейно независимы, как это видно на стр. 133 и 135, поэтому ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ равен 2.

Также заметим, что $\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \times 2 - 1 \times 1 = 5 \neq 0$.

Пример 2

Линейная система уравнений $\begin{cases} 3x_1+6x_2=y_1 \\ 1x_1+2x_2=y_2 \end{cases}$, то есть $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x_1+6x_2 \\ 1x_1+2x_2 \end{pmatrix}$, может быть переписана следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x_1+6x_2 \\ 1x_1+2x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=[\,x_1+2x_2\,]\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так, что ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ равен 1.

Также заметим, что $\det\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=3\times2-6\times1=0$.

Пример 3

Линейную систему уравнений $\begin{cases} 1x_1+0x_2=y_1 \\ 0x_1+1x_2=y_2 \\ 0x_1+0x_2=y_3 \end{cases}$, то есть $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1x_1+0x_2 \\ 0x_1+1x_2 \\ 0x_1+0x_2 \end{pmatrix}$, можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1x_1+0x_2 \\ 0x_1+1x_2 \\ 0x_1+0x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Два вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ линейно независимы, как мы выяснили на стр. 132, поэтому ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ равен 2.

Эту систему также можно записать как:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1x_1+0x_2 \\ 0x_1+1x_2 \\ 0x_1+0x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0$.

Пример 4

Линейную систему уравнений $\begin{cases} 1x_1+0x_2+3x_3+1x_4=y_1 \\ 0x_1+1x_2+1x_3+2x_4=y_2 \end{cases}$, то есть $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1x_1+0x_2+3x_3+1x_4 \\ 0x_1+1x_2+1x_3+2x_4 \end{pmatrix}$, можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1x_1+0x_2+3x_3+1x_4 \\ 0x_1+1x_2+1x_3+2x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=$$

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ равен 2, как мы это увидим на стр. 204.

Эту систему можно записать как:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1x_1+0x_2+3x_3+1x_4 \\ 0x_1+1x_2+1x_3+2x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0$.

Кажется, что эти четыре примера указывают на тот факт, что

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=0 \text{ то же самое, что } \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\neq n.$$

Это на самом деле так, но в данной книге не дано ни одного формального доказательства.

7.6.2. Вычисление ранга матрицы

Пока что мы всего лишь имели дело с матрицами, где ранг был очевиден или мы заранее прикинули, насколько много линейно независимых векторов составляют столбцы той матрицы. Хотя на первый взгляд это может показаться небольшим обманом, такие техники могут оказаться очень полезными для вычисления рангов на практике.

Например, взгляните на следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Сразу становится понятно, что третий столбец матрицы равен первому столбцу, умноженному на четыре. Получается два линейно независимых вектора (первые два столбца), что означает, что ранг матрицы равен 2.

А теперь посмотри на эту матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тебе должно быть очевидно с самого начала, что эти векторы образуют линейно независимый набор, поэтому мы знаем, что ранг этой матрицы тоже равен 2.

Конечно, бывает так, что этот метод не срабатывает, и ты не сможешь определить ранг с его помощью, просто взглянув на матрицу. В таких случаях придется приложить усилия и посчитать ранг матрицы. Но не переживай, это не так уж сложно!

Сперва мы поясним **Задачу**, затем мы обоснуем правильный **Способ решения** и потом наконец возьмемся за **Решение**.

Задача

Вычислить ранг следующей матрицы размером 2×4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Способ решения

Прежде чем мы сможем решить эту задачу, нам надо узнать немного об элементарных матрицах. Элементарную матрицу можно создать, начав с матрицы тождественности и выполнив точно одну из элементарных операций со строками, применяемую для исключения методом Гаусса (см. главу 4). Получившиеся в результате матрицы можно затем умножить на любую произвольную матрицу таким образом, что число линейно независимых столбцов станет очевидным.

Имея такую информацию за пазухой, мы можем озвучить четыре интересных факта о произвольной матрице A:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Факт 1

Умножение элементарной матрицы

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{Строка } i \\ \\ \text{Строка } j \\ \\ \end{array} \\
\text{Столбец } i \quad \text{Столбец } j &
\end{array}$$

в левую сторону произвольной матрицы A поменяет местами строки i и j в A.

Если мы умножаем матрицу в правую сторону A, то поменяются местами столбцы в A.

Пример 1 (строки 1 и 4 поменялись местами)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0\times a_{11}+0\times a_{21}+0\times a_{31}+1\times a_{41} & 0\times a_{12}+0\times a_{22}+0\times a_{32}+1\times a_{42} & 0\times a_{13}+0\times a_{23}+0\times a_{33}+1\times a_{43} \\ 0\times a_{11}+1\times a_{21}+0\times a_{31}+0\times a_{41} & 0\times a_{12}+1\times a_{22}+0\times a_{32}+0\times a_{42} & 0\times a_{13}+1\times a_{23}+0\times a_{33}+0\times a_{43} \\ 0\times a_{11}+0\times a_{21}+1\times a_{31}+0\times a_{41} & 0\times a_{12}+0\times a_{22}+1\times a_{32}+0\times a_{42} & 0\times a_{13}+0\times a_{23}+1\times a_{33}+0\times a_{43} \\ 1\times a_{11}+0\times a_{21}+0\times a_{31}+0\times a_{41} & 1\times a_{12}+0\times a_{22}+0\times a_{32}+0\times a_{42} & 1\times a_{13}+0\times a_{23}+0\times a_{33}+0\times a_{43} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}.$$

Пример 2 (столбцы 1 и 3 поменялись местами)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\times 0 + a_{12}\times 0 + a_{13}\times 1 & a_{11}\times 0 + a_{12}\times 1 + a_{13}\times 0 & a_{11}\times 1 + a_{12}\times 0 + a_{13}\times 0 \\ a_{21}\times 0 + a_{22}\times 0 + a_{23}\times 1 & a_{21}\times 0 + a_{22}\times 1 + a_{23}\times 0 & a_{21}\times 1 + a_{22}\times 0 + a_{23}\times 0 \\ a_{31}\times 0 + a_{32}\times 0 + a_{33}\times 1 & a_{31}\times 0 + a_{32}\times 1 + a_{33}\times 0 & a_{31}\times 1 + a_{32}\times 0 + a_{33}\times 0 \\ a_{41}\times 0 + a_{42}\times 0 + a_{43}\times 1 & a_{41}\times 0 + a_{42}\times 1 + a_{43}\times 0 & a_{41}\times 1 + a_{42}\times 0 + a_{43}\times 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}.$$

Факт 2

При умножении элементарной матрицы

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Строка } i \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \\ \text{Столбец } i \end{array}$$

в левую сторону произвольной матрицы A умножится на k i-й ряд в A.

При умножении матрицы в правую сторону A на k умножится i-я строка в A.

Пример 1 **(строка 3 умножается на *k*)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1\times a_{11}+0\times a_{21}+0\times a_{31}+0\times a_{41} & 1\times a_{12}+0\times a_{22}+0\times a_{32}+0\times a_{42} & 1\times a_{13}+0\times a_{23}+0\times a_{33}+0\times a_{43} \\ 0\times a_{11}+1\times a_{21}+0\times a_{31}+0\times a_{41} & 0\times a_{12}+1\times a_{22}+0\times a_{32}+0\times a_{42} & 0\times a_{13}+1\times a_{23}+0\times a_{33}+0\times a_{43} \\ 0\times a_{11}+0\times a_{21}+k\times a_{31}+0\times a_{41} & 0\times a_{12}+0\times a_{22}+k\times a_{32}+0\times a_{42} & 0\times a_{13}+0\times a_{23}+k\times a_{33}+0\times a_{43} \\ 0\times a_{11}+0\times a_{21}+0\times a_{31}+1\times a_{41} & 0\times a_{12}+0\times a_{22}+0\times a_{32}+1\times a_{42} & 0\times a_{13}+0\times a_{23}+0\times a_{33}+1\times a_{43} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}.$$

Пример 2 **(строка 2 умножается на *k*)**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\times 1+a_{12}\times 0+a_{13}\times 0 & a_{11}\times 0+a_{12}\times k+a_{13}\times 0 & a_{11}\times 0+a_{12}\times 0+a_{13}\times 1 \\ a_{21}\times 1+a_{22}\times 0+a_{23}\times 0 & a_{21}\times 0+a_{22}\times k+a_{23}\times 0 & a_{21}\times 0+a_{22}\times 0+a_{23}\times 1 \\ a_{31}\times 1+a_{32}\times 0+a_{33}\times 0 & a_{31}\times 0+a_{32}\times k+a_{33}\times 0 & a_{31}\times 0+a_{32}\times 0+a_{33}\times 1 \\ a_{41}\times 1+a_{42}\times 0+a_{43}\times 0 & a_{41}\times 0+a_{42}\times k+a_{43}\times 0 & a_{41}\times 0+a_{42}\times 0+a_{43}\times 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \\ a_{41} & ka_{42} & a_{43} \end{pmatrix}.$$

Факт 3

При умножении элементарной матрицы

$$\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{ccccccc}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & k & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right) &
\begin{array}{l} \\ \\ \text{Строка } i \\ \\ \text{Строка } j \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & \text{Столбец } i & & \text{Столбец } j & & \end{array} &
\end{array}$$

в левую сторону произвольной матрицы A к строке j добавится строка i k раз в матрице A.

Умножив матрицу к правой стороне A, к строке i добавится строка j k раз в матрице A.

Пример 1 (к строке 4 прибавляется строка 2 k раз)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}
1\times a_{11}+0\times a_{21}+0\times a_{31}+0\times a_{41} & 1\times a_{12}+0\times a_{22}+0\times a_{32}+0\times a_{42} & 1\times a_{13}+0\times a_{23}+0\times a_{33}+0\times a_{43} \\
0\times a_{11}+1\times a_{21}+0\times a_{31}+0\times a_{41} & 0\times a_{12}+1\times a_{22}+0\times a_{32}+0\times a_{42} & 0\times a_{13}+1\times a_{23}+0\times a_{33}+0\times a_{43} \\
0\times a_{11}+0\times a_{21}+1\times a_{31}+0\times a_{41} & 0\times a_{12}+0\times a_{22}+1\times a_{32}+0\times a_{42} & 0\times a_{13}+0\times a_{23}+1\times a_{33}+0\times a_{43} \\
0\times a_{11}+k\times a_{21}+0\times a_{31}+1\times a_{41} & 0\times a_{12}+k\times a_{22}+0\times a_{32}+1\times a_{42} & 0\times a_{13}+k\times a_{23}+0\times a_{33}+1\times a_{43}
\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41}+ka_{21} & a_{42}+ka_{22} & a_{43}+ka_{23} \end{pmatrix}.$$

Пример 2 (к столбцу 1 прибавляется столбец 3 k раз)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\times 1 + a_{12}\times 0 + a_{13}\times k & a_{11}\times 0 + a_{12}\times 1 + a_{13}\times 0 & a_{11}\times 0 + a_{12}\times 0 + a_{13}\times 1 \\ a_{21}\times 1 + a_{22}\times 0 + a_{23}\times k & a_{21}\times 0 + a_{22}\times 1 + a_{23}\times 0 & a_{21}\times 0 + a_{22}\times 0 + a_{23}\times 1 \\ a_{31}\times 1 + a_{32}\times 0 + a_{33}\times k & a_{31}\times 0 + a_{32}\times 1 + a_{33}\times 0 & a_{31}\times 0 + a_{32}\times 0 + a_{33}\times 1 \\ a_{41}\times 1 + a_{42}\times 0 + a_{43}\times k & a_{41}\times 0 + a_{42}\times 1 + a_{43}\times 0 & a_{41}\times 0 + a_{42}\times 0 + a_{43}\times 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{33} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} + ka_{43} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}.$$

Факт 4

Следующие три матрицы $m \times n$ все имеют одинаковый ранг:

1) матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

2) левое произведение, использующее обратимую матрицу $m \times m$:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

3) правое произведение, использующее обратимую матрицу $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Другими словами, умножение A на элементарную матрицу с любой стороны не меняет ранг A, так как элементарные матрицы обратимы.

Решение

Приведенная ниже таблица отображает вычисления ранга матрицы 2×4: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Начнем с $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Прибавим (–1 · столбец 2) к столбцу 3 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Прибавим (–1 · столбец 1) к столбцу 4 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Прибавим (–3 · столбец 1) к столбцу 3 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Прибавим (–2 · столбец 2) к столбцу 4 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Исходя из факта 4, мы знаем, что обе $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ имеют одинаковый ранг.

Одного взгляда на упрощенную матрицу достаточно, чтобы увидеть, что среди всех столбцов только $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ являются линейно независимыми.

Это значит, что эта матрица имеет ранг 2, и, следовательно, наша изначальная матрица тоже.

7.7. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ И МАТРИЦАМИ

Мы немного уже поговорили об отношениях между линейными преобразованиями и матрицами на стр. 168. Было сказано, что линейные преобразования из R^n в R^m могут быть записаны как матрица $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Как ты, возможно, уже заметил, это объяснение немного туманно. Более точные отношения выражены таким образом:

Отношения между линейными преобразованиями и матрицами

Если $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – это произвольный элемент в R^n, а f – это функция из R^n в R^m,

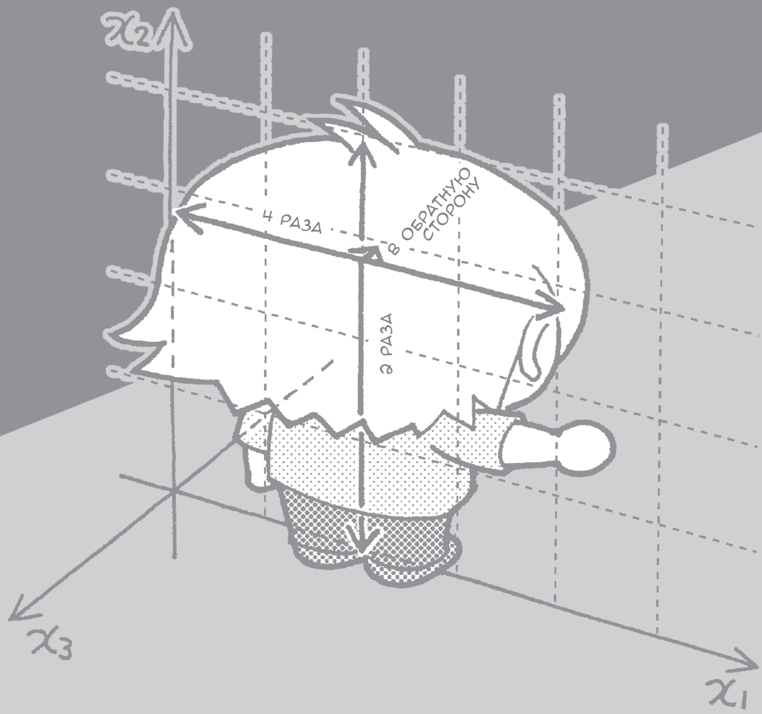
тогда f – это линейное преобразование из R^n в R^m тогда и только тогда, если

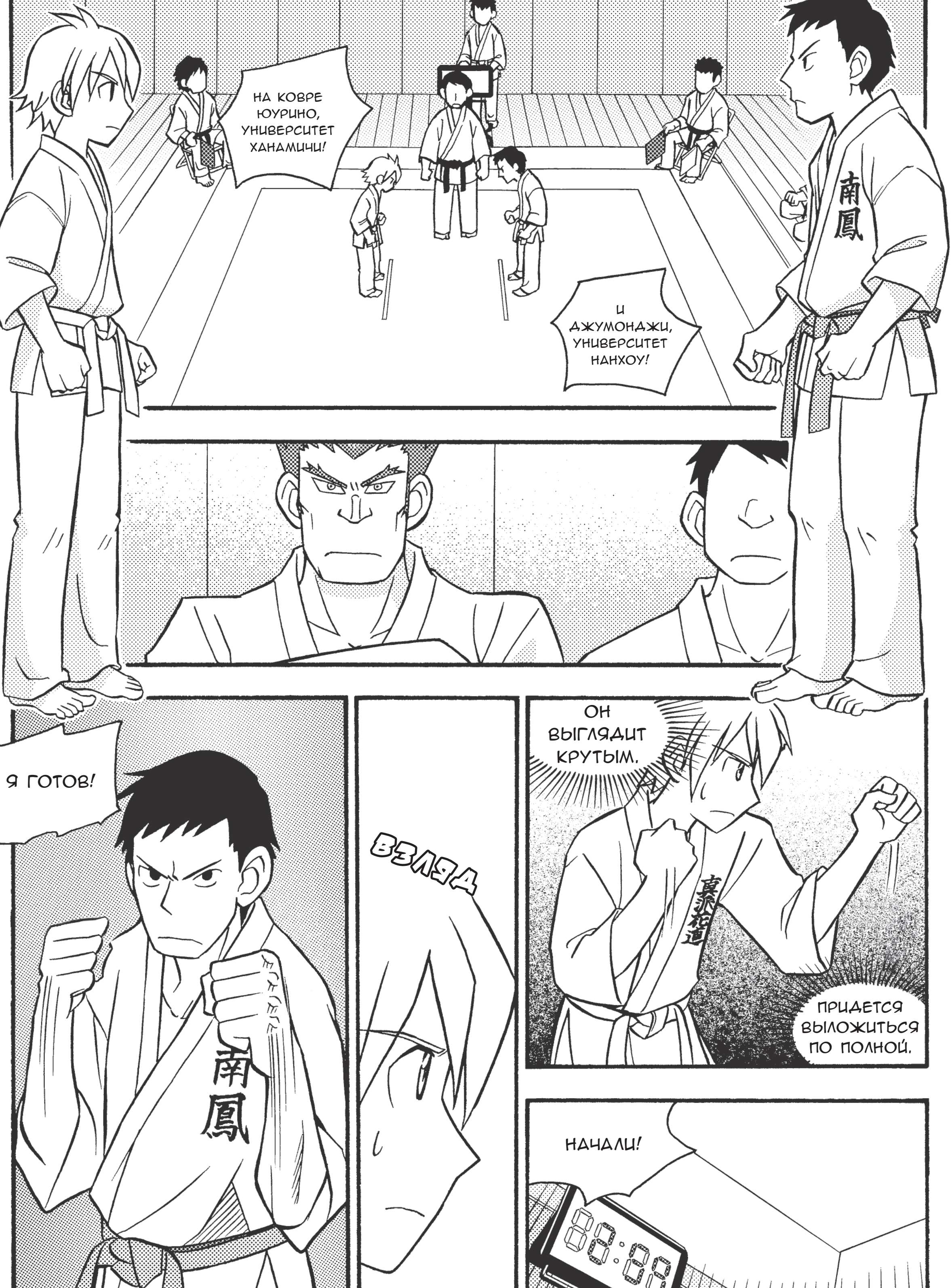
$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

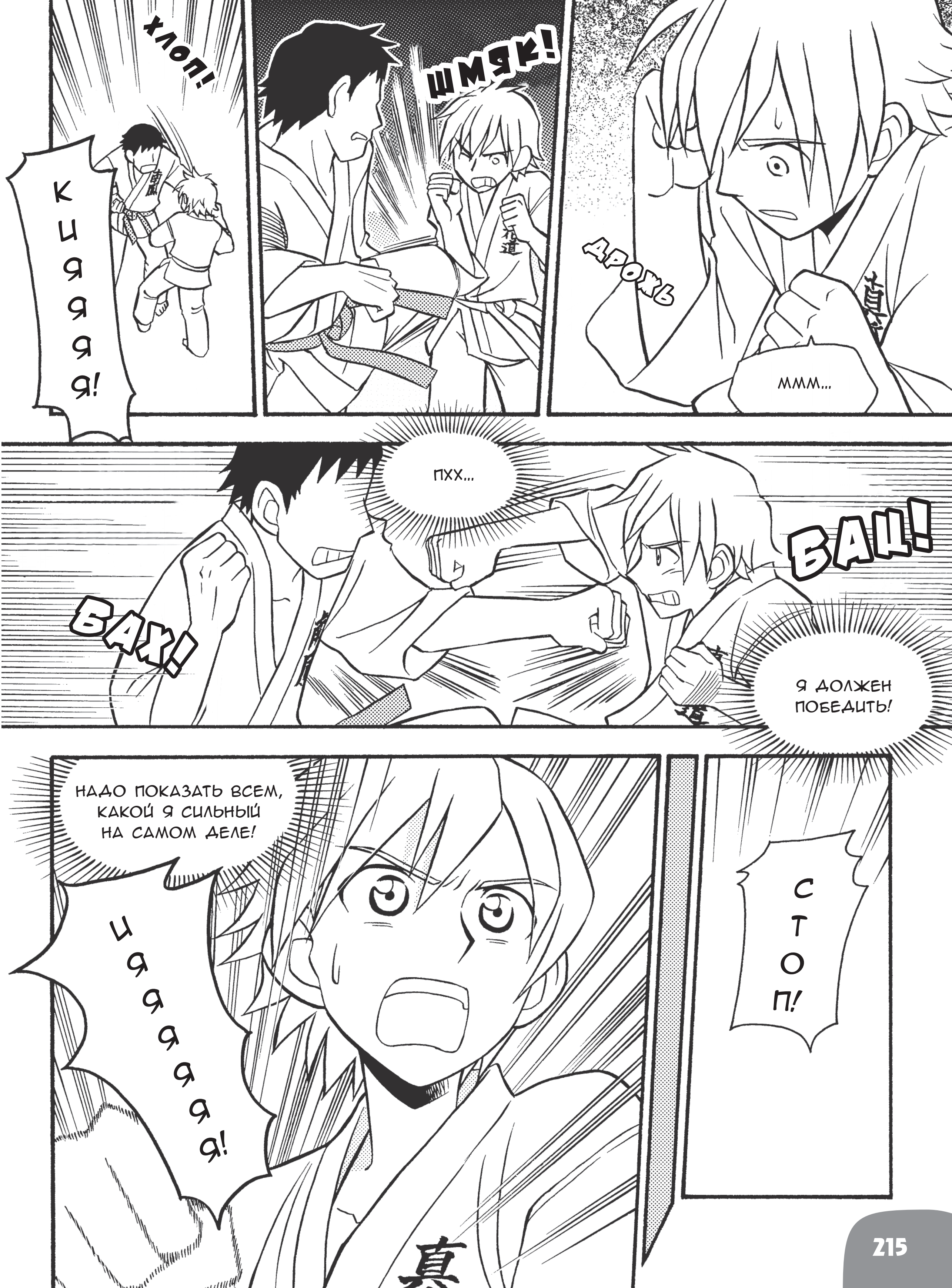
для некой матрицы A.

ГЛАВА 8

СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

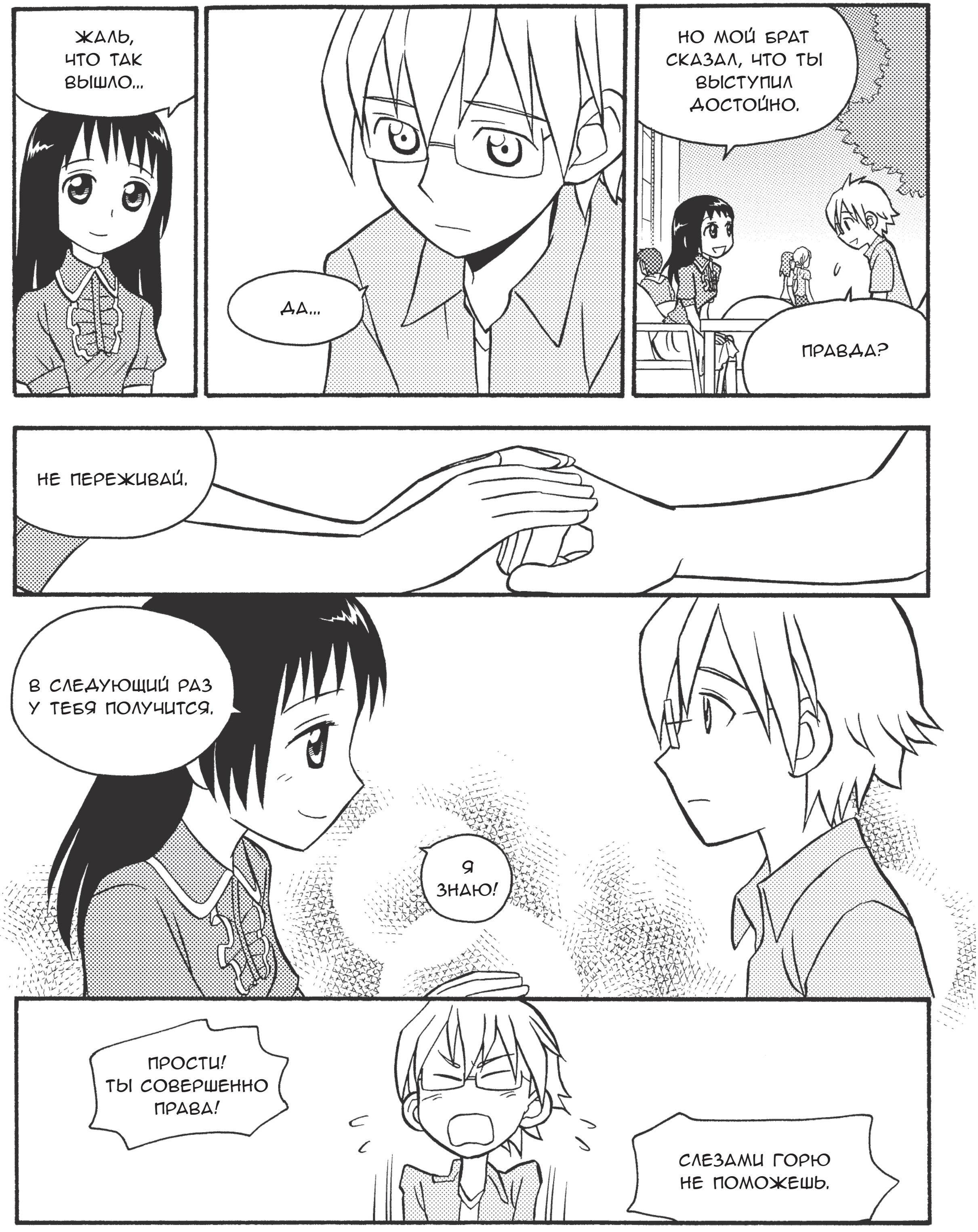


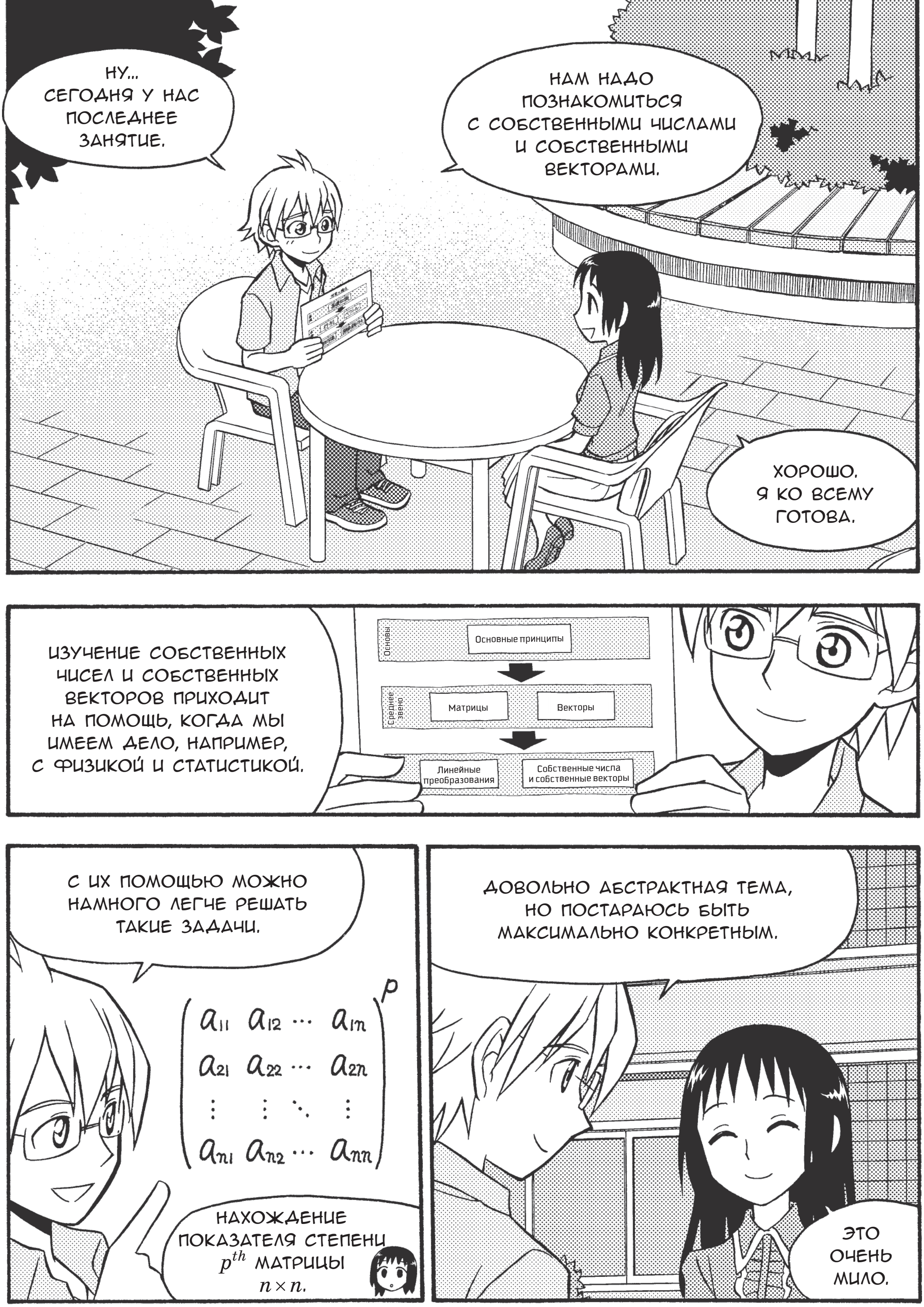

На ковре Юурино, университет Ханамичи!
И Джумонджи, университет Нанхоу!
Я готов!
ВЗГЛЯД
Он выглядит крутым.
Придется выложиться по полной.
Начали!



КИЯЯЯЯЯ!
ХЛОП!
ШМЯК!
ДРОЖЬ
МММ...
ПХХ...
БАЦ!
БАХ!
Я ДОЛЖЕН ПОБЕДИТЬ!
НАДО ПОКАЗАТЬ ВСЕМ, КАКОЙ Я СИЛЬНЫЙ НА САМОМ ДЕЛЕ!
ИЯЯЯЯЯЯЯ!
СТОП!

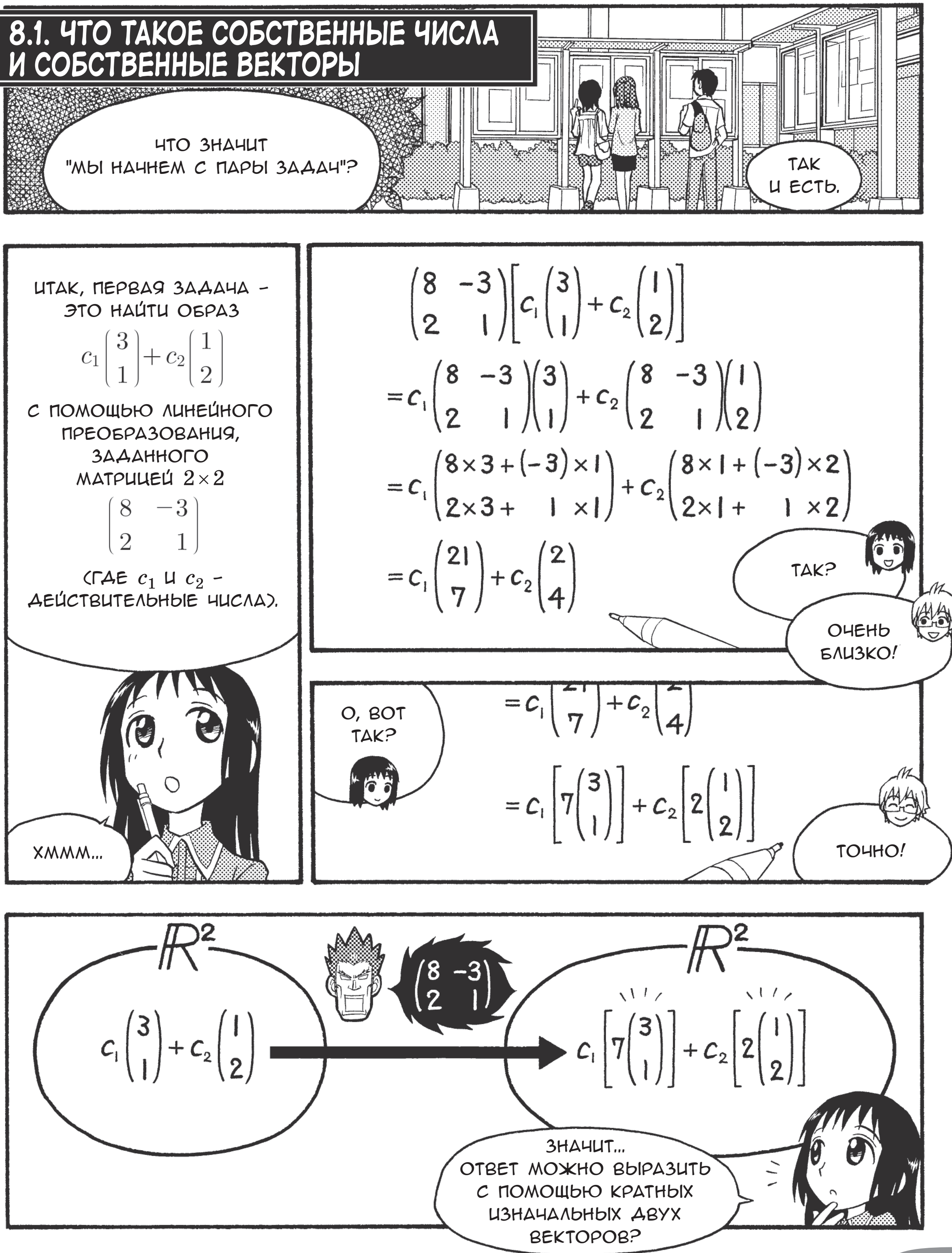

УНИВЕРСИТЕТ НАНХОУ!
СПАСИБО... БОЛЬШОЕ...
ЧЕРТ...
ХОРОШИЙ БОЙ.

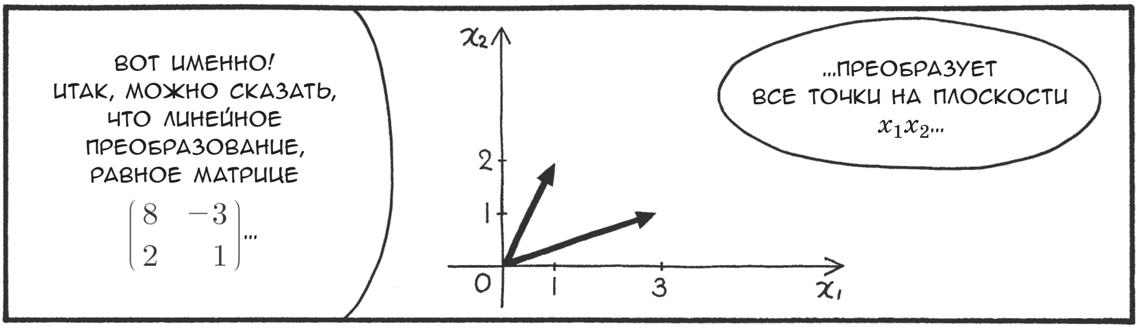

Жаль, что так вышло...
Да...
Но мой брат сказал, что ты выступил достойно.
Правда?
Не переживай.
В следующий раз у тебя получится.
Я знаю!
Прости! Ты совершенно права!
Слезами горю не поможешь.

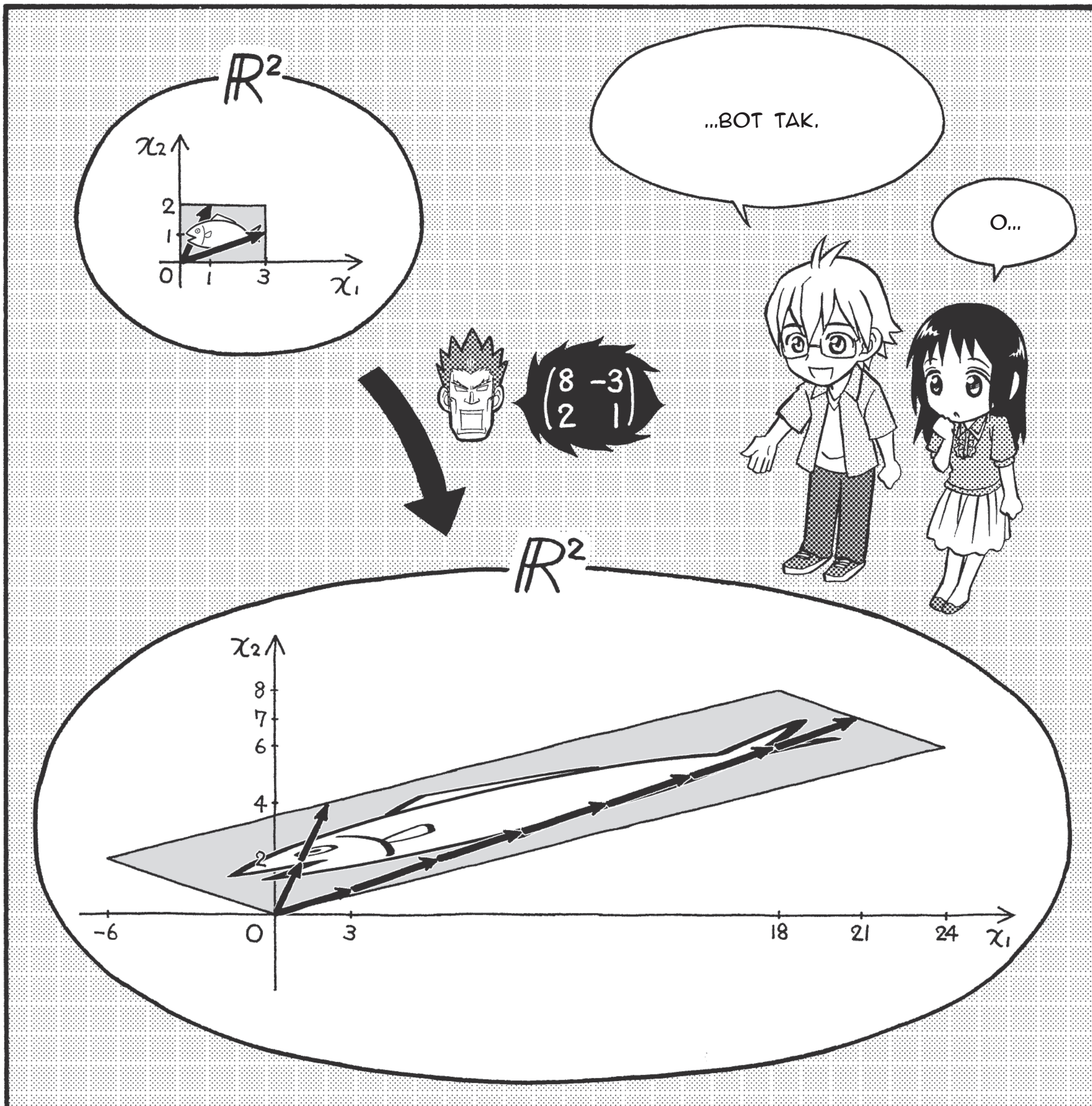


НУ...
СЕГОДНЯ У НАС ПОСЛЕДНЕЕ ЗАНЯТИЕ.
НАМ НАДО ПОЗНАКОМИТЬСЯ С СОБСТВЕННЫМИ ЧИСЛАМИ И СОБСТВЕННЫМИ ВЕКТОРАМИ.
ХОРОШО. Я КО ВСЕМУ ГОТОВА.
ИЗУЧЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ПРИХОДИТ НА ПОМОЩЬ, КОГДА МЫ ИМЕЕМ ДЕЛО, НАПРИМЕР, С ФИЗИКОЙ И СТАТИСТИКОЙ.
Основы
Основные принципы
Среднее звено
Матрицы
Векторы
Линейные преобразования
Собственные числа и собственные векторы
С ИХ ПОМОЩЬЮ МОЖНО НАМНОГО ЛЕГЧЕ РЕШАТЬ ТАКИЕ ЗАДАЧИ.
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^p$
НАХОЖДЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ СТЕПЕНИ p^{th} МАТРИЦЫ $n \times n$.
ДОВОЛЬНО АБСТРАКТНАЯ ТЕМА, НО ПОСТАРАЮСЬ БЫТЬ МАКСИМАЛЬНО КОНКРЕТНЫМ.
ЭТО ОЧЕНЬ МИЛО.

8.1. ЧТО ТАКОЕ СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ




ВОТ ИМЕННО! ИТАК, МОЖНО СКАЗАТЬ, ЧТО ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, РАВНОЕ МАТРИЦЕ $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$...
x_2
2
1
0
1
3
x_1
...ПРЕОБРАЗУЕТ ВСЕ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ x_1x_2...

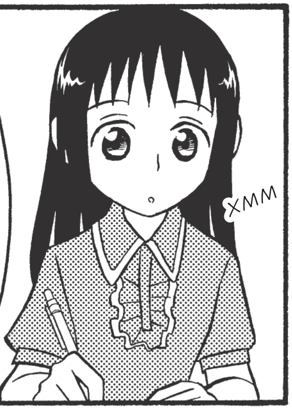

$\mathbb{R}^2$
x_2
2
1
0
1
3
x_1
...ВОТ ТАК.
О...
$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2$
x_2
8
7
6
4
2
-6
0
3
18
21
24
x_1

ПЕРЕЙДЕМ К СЛЕДУЮЩЕЙ ЗАДАЧЕ.

НАЙДЕМ ОБРАЗ $c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, ИСПОЛЬЗУЯ

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, ЗАДАННОЕ МАТРИЦЕЙ 3×3

$\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ (ГДЕ c_1, c_2 И c_3 – ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА).



$$\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\left[c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

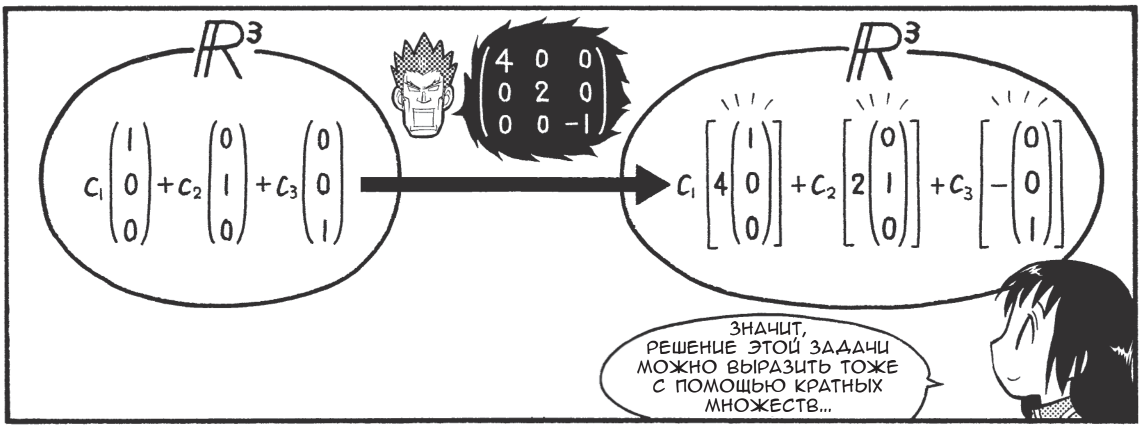
$$=c_1\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

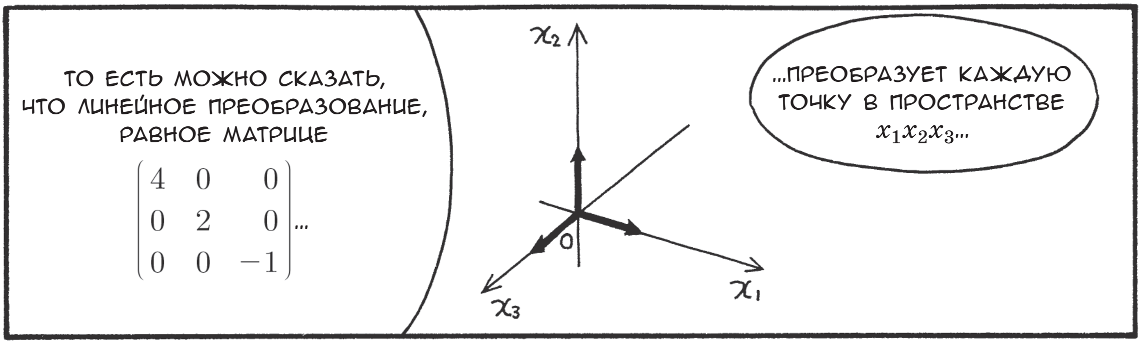
$$=c_1\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$=c_1\left[4\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]+c_2\left[2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]+c_3\left[-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

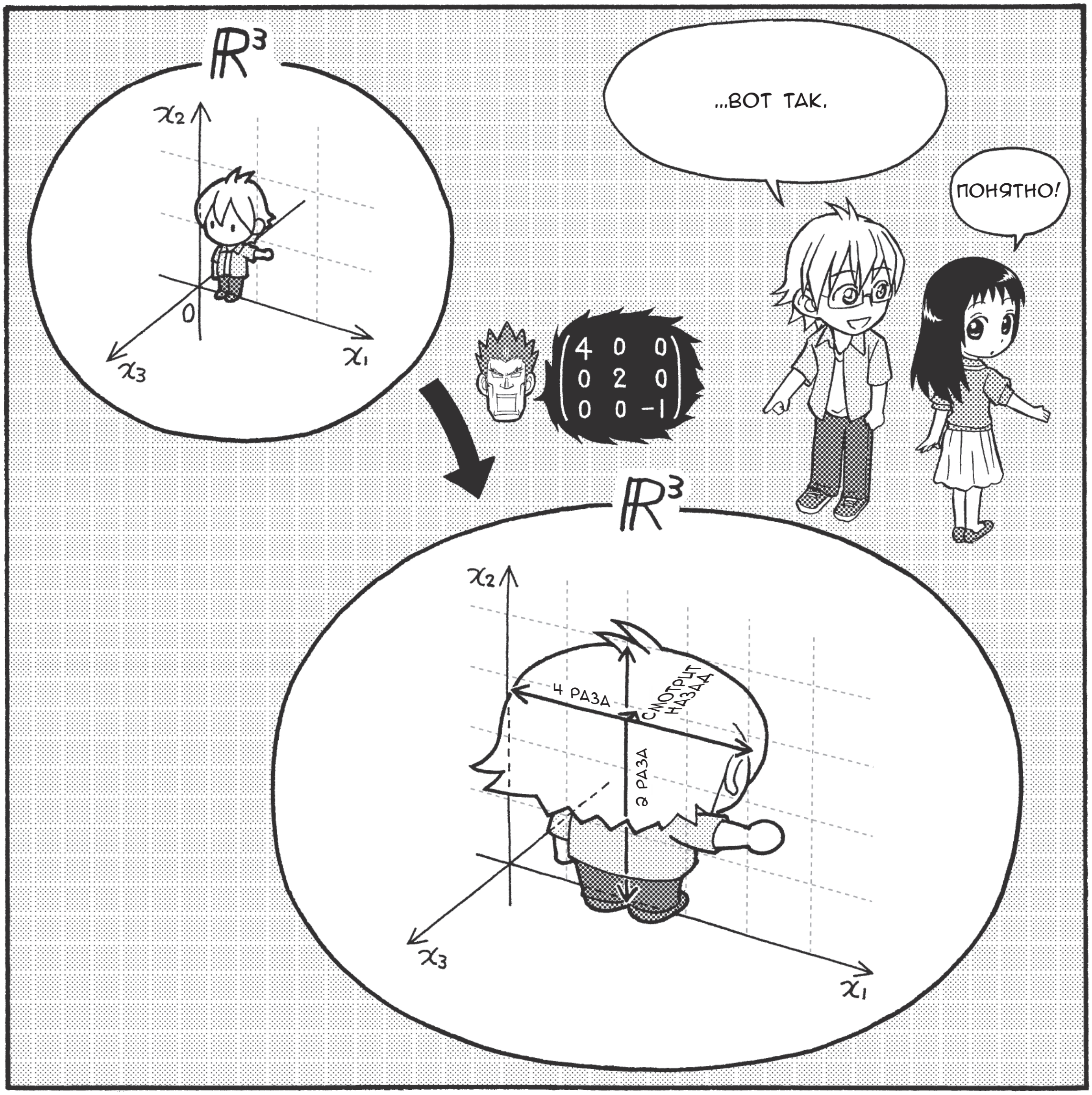
ТАК?

ВЕРНО.





ТО ЕСТЬ МОЖНО СКАЗАТЬ, ЧТО ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, РАВНОЕ МАТРИЦЕ
$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$...
...ПРЕОБРАЗУЕТ КАЖДУЮ ТОЧКУ В ПРОСТРАНСТВЕ $x_1x_2x_3$...
x_2
x_1
x_3
0

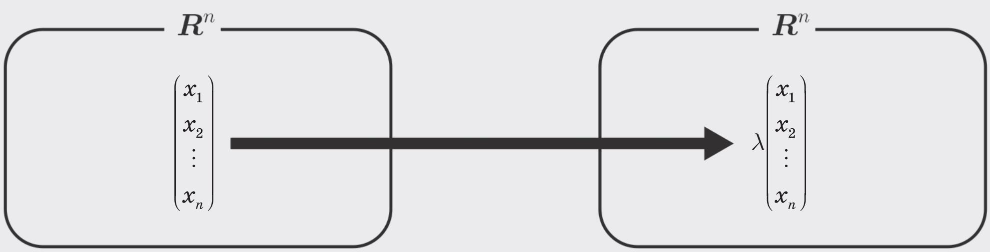


$\mathbb{R}^3$
x_2
x_1
x_3
0
$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
...ВОТ ТАК.
ПОНЯТНО!
$\mathbb{R}^3$
4 РАЗА
2 РАЗА
СМОТРИТ НАЗАД
x_2
x_1
x_3

Собственные числа и собственные векторы

Если образ вектора $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ после линейного преобразования, заданного матрицей $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, равен $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, говорят, что λ – это собственное число матрицы, а $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – это собственный вектор, соответствующий собственному числу λ.

Нулевой вектор может никогда не быть собственным вектором.



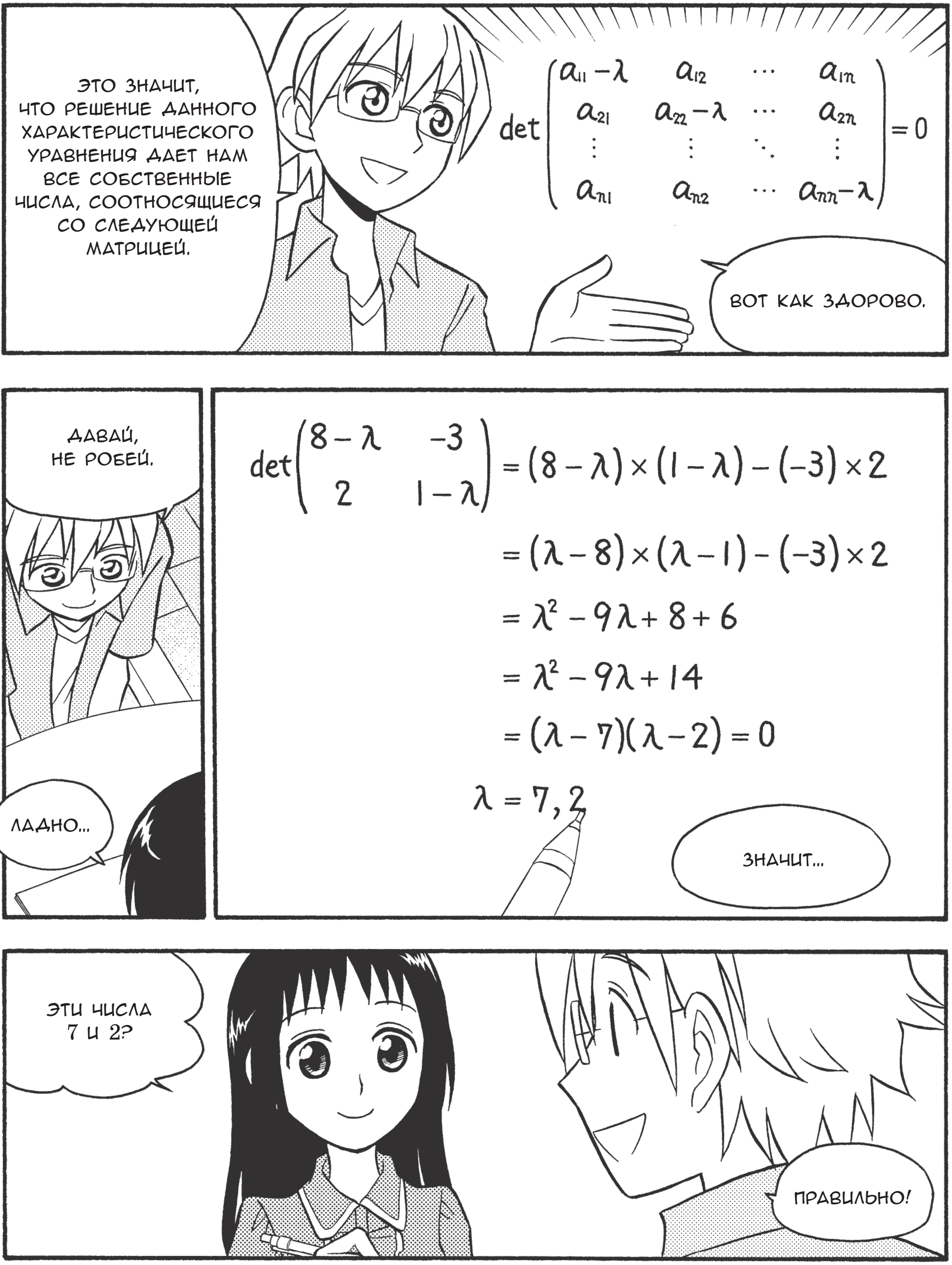
Матрица	$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Собственное значение	$\lambda = 7, 2$	$\lambda = 4, 2, -1$
Собственный вектор	Вектор, соответствующий $\lambda = 7$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ Вектор, соответствующий $\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	Вектор, соответствующий $\lambda = 4$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Вектор, соответствующий $\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Вектор, соответствующий $\lambda = -1$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

8.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Связь между определителем и собственными числами матрицы

λ – это собственное число матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ тогда и только тогда, когда } \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$


ЭТО ЗНАЧИТ, ЧТО РЕШЕНИЕ ДАННОГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДАЕТ НАМ ВСЕ СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА, СООТНОСЯЩИЕСЯ СО СЛЕДУЮЩЕЙ МАТРИЦЕЙ.
$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$
ВОТ КАК ЗДОРОВО.
ДАВАЙ, НЕ РОБЕЙ.
ЛАДНО...
$$\det\begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (8-\lambda)\times(1-\lambda)-(-3)\times 2$$
$$= (\lambda-8)\times(\lambda-1)-(-3)\times 2$$
$$= \lambda^2-9\lambda+8+6$$
$$= \lambda^2-9\lambda+14$$
$$= (\lambda-7)(\lambda-2)=0$$
$$\lambda = 7, 2$$
ЗНАЧИТ...
ЭТИ ЧИСЛА 7 И 2?
ПРАВИЛЬНО!

Задача 1

Найти собственное число, соответствующее $\lambda = 7$.
Давай включим наше число в формулу:

$$\begin{pmatrix} 8-7 & -3 \\ 2 & 1-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-3x_2 \\ 2x_1-6x_2 \end{pmatrix} = [\, x_1-3x_2 \,]\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это значит, что $x_1 = 3x_2$, что приводит нас к нашему собственному вектору

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где c_1 – это произвольное действительное число, не равное нулю.

Задача 2

Найти собственный вектор, соответствующий $\lambda = 2$.
Давай включим наше значение в формулу:

$$\begin{pmatrix} 8-2 & -3 \\ 2 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1-3x_2 \\ 2x_1-\ x_2 \end{pmatrix} = [\, 2x_1-x_2 \,]\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это значит, что $x_2 = 2x_1$, что приводит нас к нашему собственному вектору

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix} = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

где c_2 – это произвольное действительное число, не равное нулю.

8.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ СТЕПЕНИ P МАТРИЦЫ N×N

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 7 \\ 1\times 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2 \\ 2\times 2 \end{pmatrix}$$

Для простоты вычислений выберем $c_1 = c_2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 7 & 1\times 2 \\ 1\times 7 & 2\times 2 \end{pmatrix}$$

Используя два данных выше вычисления...

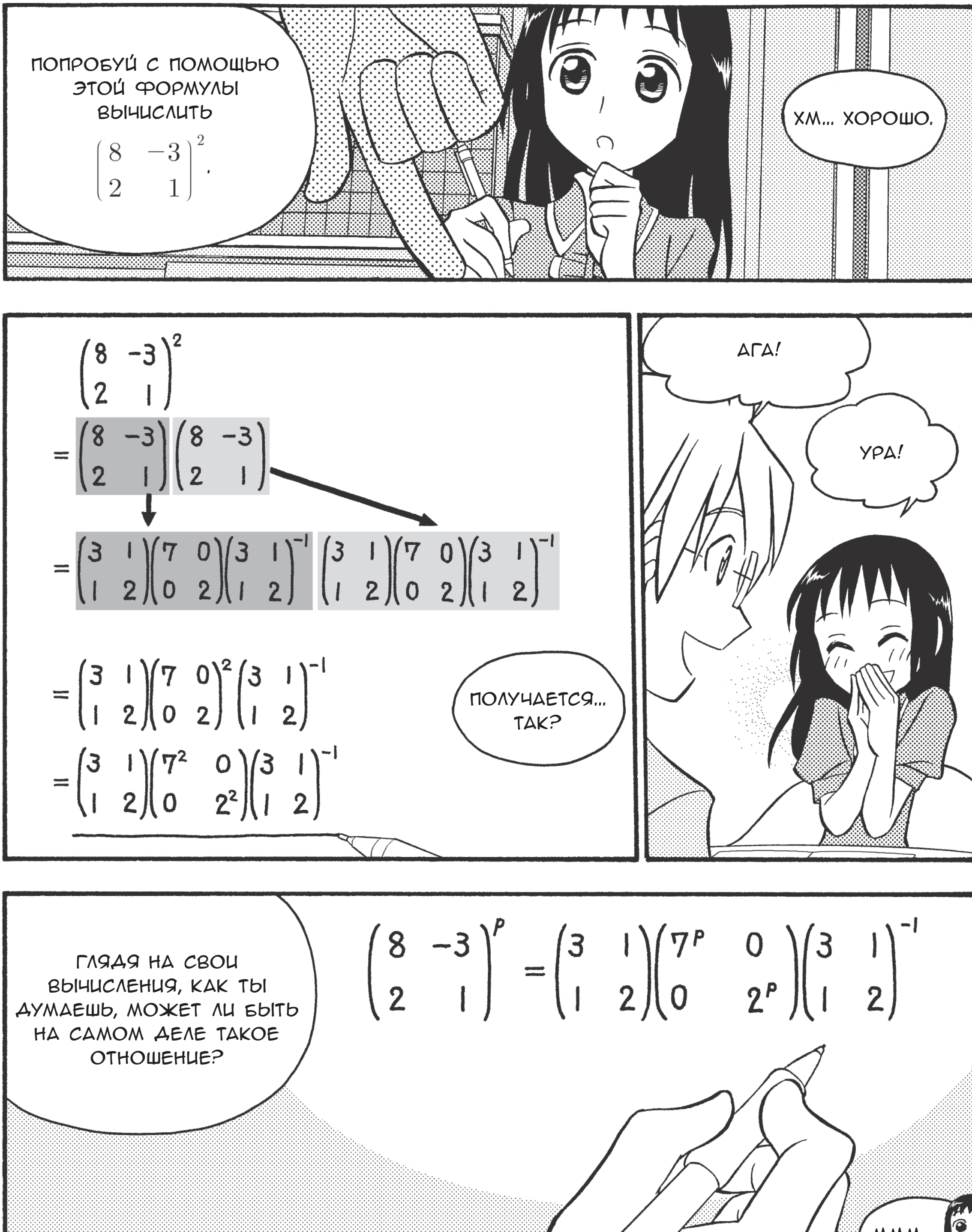
$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

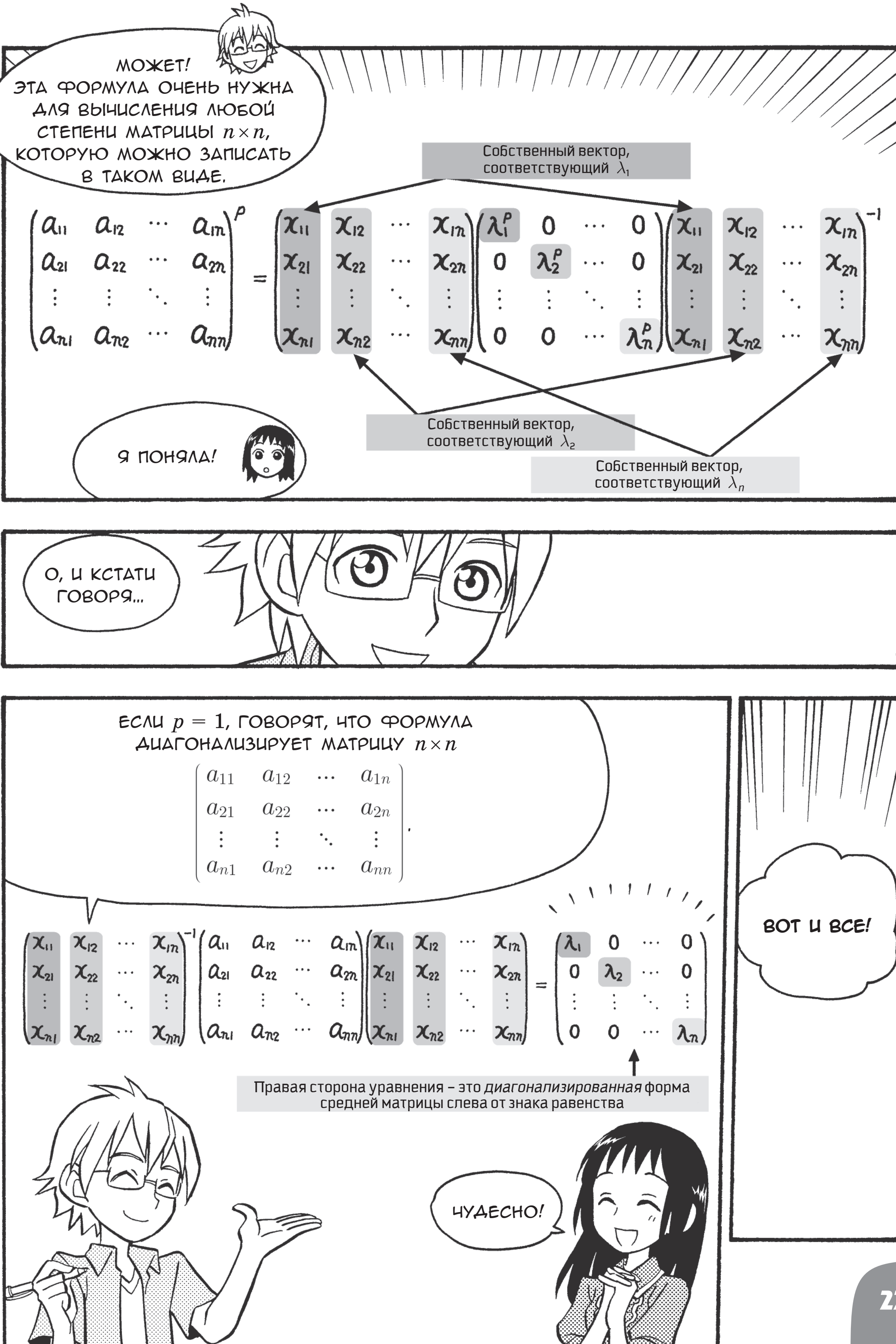
...умножим на $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ каждую сторону нашего уравнения. На стр. 91 объясняется, почему $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ существует.

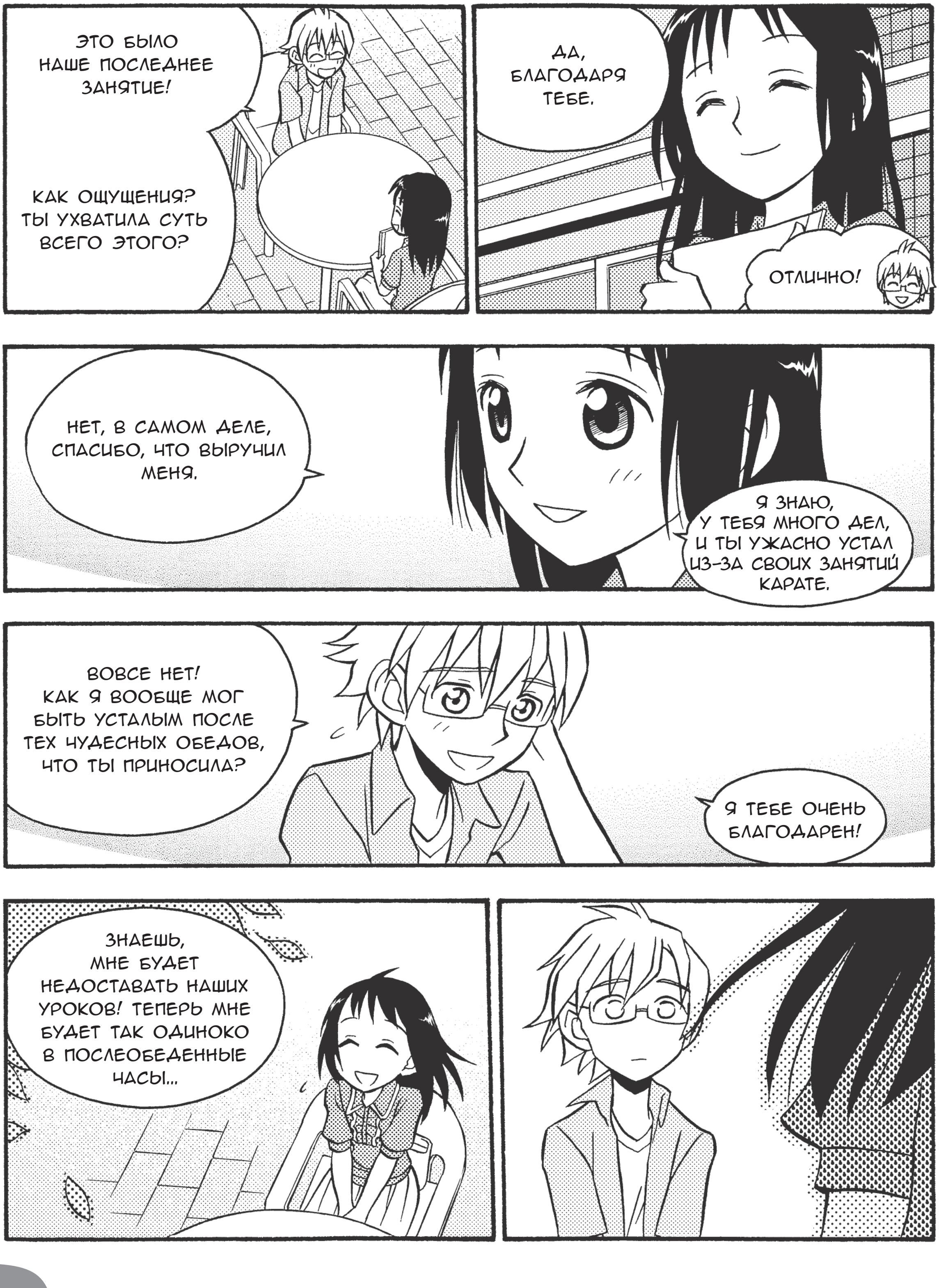
$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

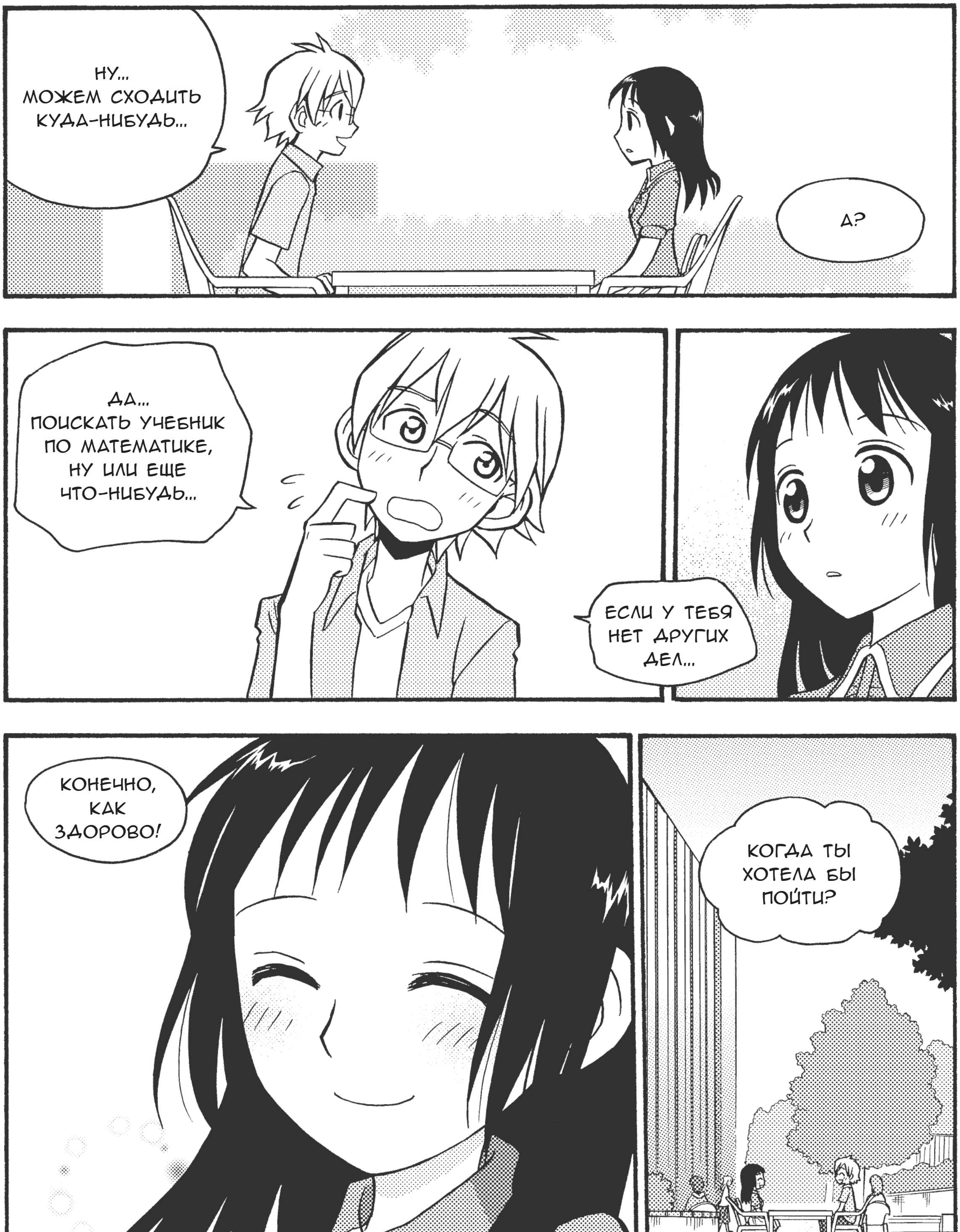
$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

РАЗУМНО


Попробуй с помощью этой формулы вычислить $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2$.
Хм... хорошо.
$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2$
$= \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$
$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$
$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$
Получается... так?
Ага!
Ура!
Глядя на свои вычисления, как ты думаешь, может ли быть на самом деле такое отношение?
$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7^p & 0 \\ 0 & 2^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$
Ммм...


МОЖЕТ! ЭТА ФОРМУЛА ОЧЕНЬ НУЖНА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЛЮБОЙ СТЕПЕНИ МАТРИЦЫ $n \times n$, КОТОРУЮ МОЖНО ЗАПИСАТЬ В ТАКОМ ВИДЕ.
Собственный вектор, соответствующий λ_1
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1}$$
Собственный вектор, соответствующий λ_2
Собственный вектор, соответствующий λ_n
Я ПОНЯЛА!
О, И КСТАТИ ГОВОРЯ...
ЕСЛИ $p = 1$, ГОВОРЯТ, ЧТО ФОРМУЛА ДИАГОНАЛИЗИРУЕТ МАТРИЦУ $n \times n$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
ВОТ И ВСЕ!
$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$
Правая сторона уравнения – это *диагонализированная* форма средней матрицы слева от знака равенства
ЧУДЕСНО!


ЭТО БЫЛО НАШЕ ПОСЛЕДНЕЕ ЗАНЯТИЕ!
КАК ОЩУЩЕНИЯ? ТЫ УХВАТИЛА СУТЬ ВСЕГО ЭТОГО?
ДА, БЛАГОДАРЯ ТЕБЕ.
ОТЛИЧНО!
НЕТ, В САМОМ ДЕЛЕ, СПАСИБО, ЧТО ВЫРУЧИЛ МЕНЯ.
Я ЗНАЮ, У ТЕБЯ МНОГО ДЕЛ, И ТЫ УЖАСНО УСТАЛ ИЗ-ЗА СВОИХ ЗАНЯТИЙ КАРАТЕ.
ВОВСЕ НЕТ! КАК Я ВООБЩЕ МОГ БЫТЬ УСТАЛЫМ ПОСЛЕ ТЕХ ЧУДЕСНЫХ ОБЕДОВ, ЧТО ТЫ ПРИНОСИЛА?
Я ТЕБЕ ОЧЕНЬ БЛАГОДАРЕН!
ЗНАЕШЬ, МНЕ БУДЕТ НЕДОСТАВАТЬ НАШИХ УРОКОВ! ТЕПЕРЬ МНЕ БУДЕТ ТАК ОДИНОКО В ПОСЛЕОБЕДЕННЫЕ ЧАСЫ...


Ну...
можем сходить
куда-нибудь...
А?
Да...
поискать учебник
по математике,
ну или еще
что-нибудь...
Если у тебя
нет других
дел...
Конечно,
как
здорово!
Когда ты
хотела бы
пойти?

8.4. ПОВТОРЯЕМОСТЬ И ПРИВЕДЕНИЕ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

На стр. 221 мы говорили, что любую матрицу размером $n \times n$ можно выразить в виде:

Собственный вектор, соответствующий λ_1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1}$$

Собственный вектор, соответствующий λ_2

Собственный вектор, соответствующий λ_n

Это не всегда верно, так как важную роль в том, может ли матрица быть выражена в диагональном виде или нет, играет понятие повторяемости. Например, если все n решений следующего уравнения

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

действительны и имеют повторяемость 1, то представление в диагональном виде возможно. Ситуация становится сложнее, если нам приходится иметь дело с собственными значениями, имеющими повторяемость больше 1. Следовательно, нам надо ознакомиться с примерами, включающими в себя:

- матрицы с собственными числами, где повторяемость выше 1 и которые можно представить в диагональном виде;
- матрицы с собственными числами, где повторяемость выше 1 и которые нельзя представить в диагональном виде.

[1] Повторяемость любого корня полинома показывает количество идентичных копий этого самого корня, существующих в полиноме. Например, в полиноме $f(x) = (x - 1)^4(x + 2)^2x$, где множитель $(x - 1)$ имеет повторяемость 4, $(x + 2)$ – повторяемость 2, а x – повторяемость 1.

8.4.1. Матрица простой структуры с собственным числом, имеющая повторяемость 2

Задача

Используй следующую матрицу в обеих задачах:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Найти все собственные числа и собственные векторы матрицы.
2. Представить матрицу в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Решение

1. Собственные числа λ матрицы 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

– это корни характеристического уравнения: $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}=0.$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}=$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)+0\times(-1)\times(-2)+0\times 1\times 0-$$

$$0\times(1-\lambda)\times(-2)-0\times 1\times(3-\lambda)-(1-\lambda)\times(-1)\times 0=$$

$$(1-\lambda)^2(3-\lambda)=0$$

$$\lambda=3,\ 1$$

Заметим, что собственное число 1 имеет повторяемость 2.

А. Собственные векторы, соответствующие $\lambda = 3$.

Давай введем наше собственное число в следующую формулу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ то есть } \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 0 \\ 1 & 1-3 & -1 \\ -2 & 0 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x_1 \\ x_1-2x_2-x_3 \\ -2x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_3=-2x_2 \end{cases},$$

а собственный вектор равен

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ -2c_1 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

где c_1 – это действительное число, не равное нулю.

Б. Собственные векторы, связанные с $\lambda = 1$.

Повторяя шаги, пройденные выше, получаем

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-1 & -1 \\ -2 & 0 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ x_1-x_3 \\ -2x_1+2x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и видим, что $x_3 = x_1$, а x_2 может быть любым действительным числом. Собственный вектор, соответственно, становится

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_2 \end{pmatrix}=c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где c_1 и c_2 – произвольные действительные числа, которые не могут равняться нулю.

2. Применяем формулу со стр. 229:

Собственный вектор, соответствующий 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Линейно независимые собственные векторы, соответствующие 1

8.4.2. Недиагонализированная матрица с собственным числом, имеющая повторяемость 2

Задача

Используем данную ниже матрицу для решения обеих задач:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Вычислить все собственные числа и собственные векторы данной матрицы.
2. Представить данную матрицу в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Решение

1. Собственные числа λ матрицы 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

– это корни характеристического уравнения: $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -7 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}=0.$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -7 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}=$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)+0\times(-1)\times4+0\times(-7)\times0-$$

$$0\times(1-\lambda)\times4-0\times(-7)\times(3-\lambda)-(1-\lambda)\times(-1)\times0=$$

$$(1-\lambda)^2(3-\lambda)=0$$

$$\lambda=3,\ 1$$

И снова заметим, что собственное число 1 имеет повторяемость 2.

A. Собственные векторы, соответствующие $\lambda = 3$.

Давайте вставим наше собственное число в следующую формулу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ то есть } \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -7 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 0 \\ -7 & 1-3 & -1 \\ 4 & 0 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -7 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x_1 \\ -7x_1-2x_2-x_3 \\ 4x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение будет следующим:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases},$$

а собственный вектор равен

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ -2c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

где c_1 – это действительное число, не равное нулю.

Б. Собственные векторы, соответствующие $\lambda = 1$.

Получаем

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ -7 & 1-1 & -1 \\ 4 & 0 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7x_1 - \ x_3 \\ 4x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и видим, что $\begin{cases} x_3 = -7x_1 \\ x_3 = -2x_1 \end{cases}.$

Но это имеет место быть, только если $x_1 = x_3 = 0$. Поэтому собственный вектор должен быть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где c_2 – это произвольное действительное число, не равное нулю.

2. Так как собственных векторов нет в виде

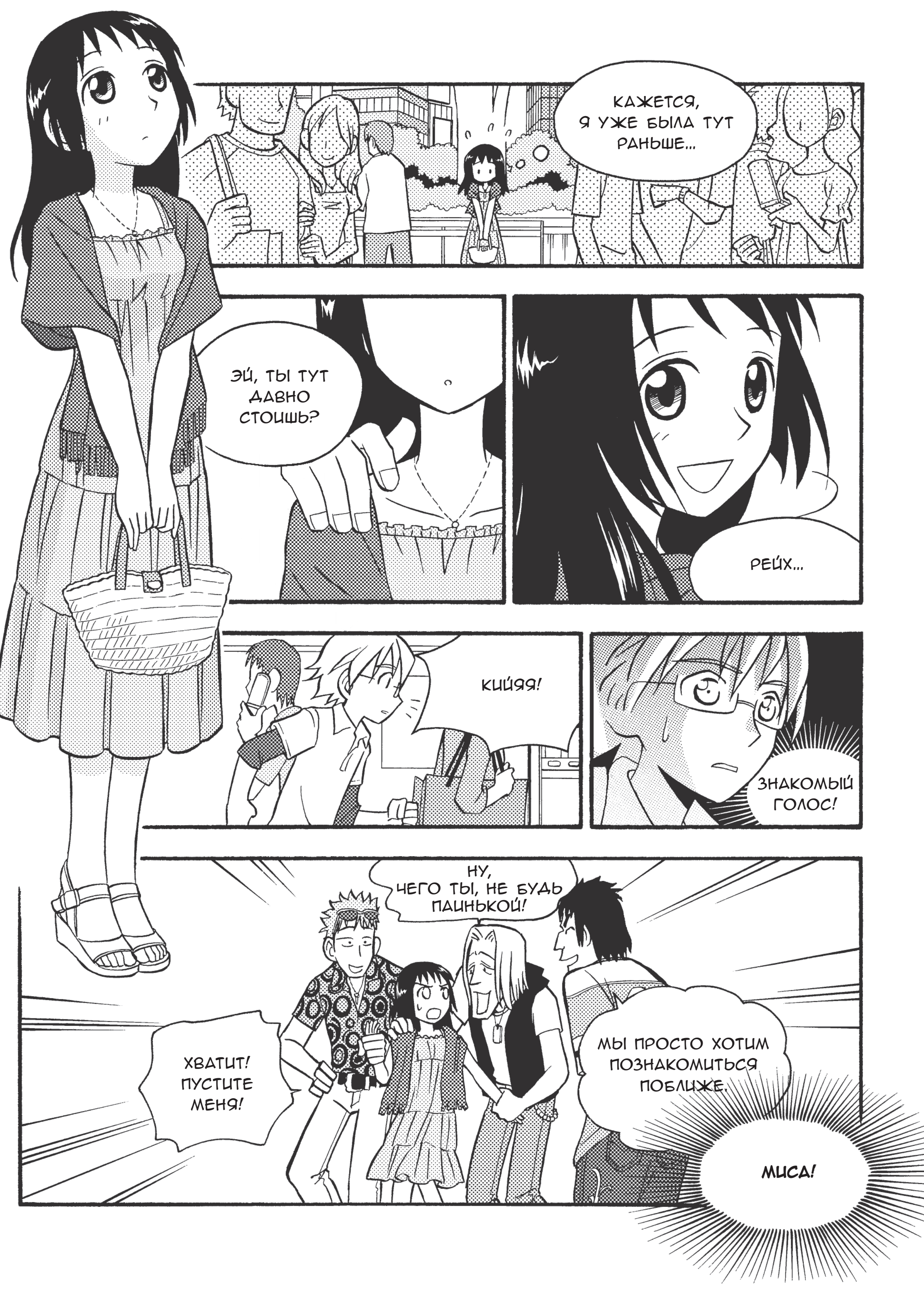
$$c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}$$

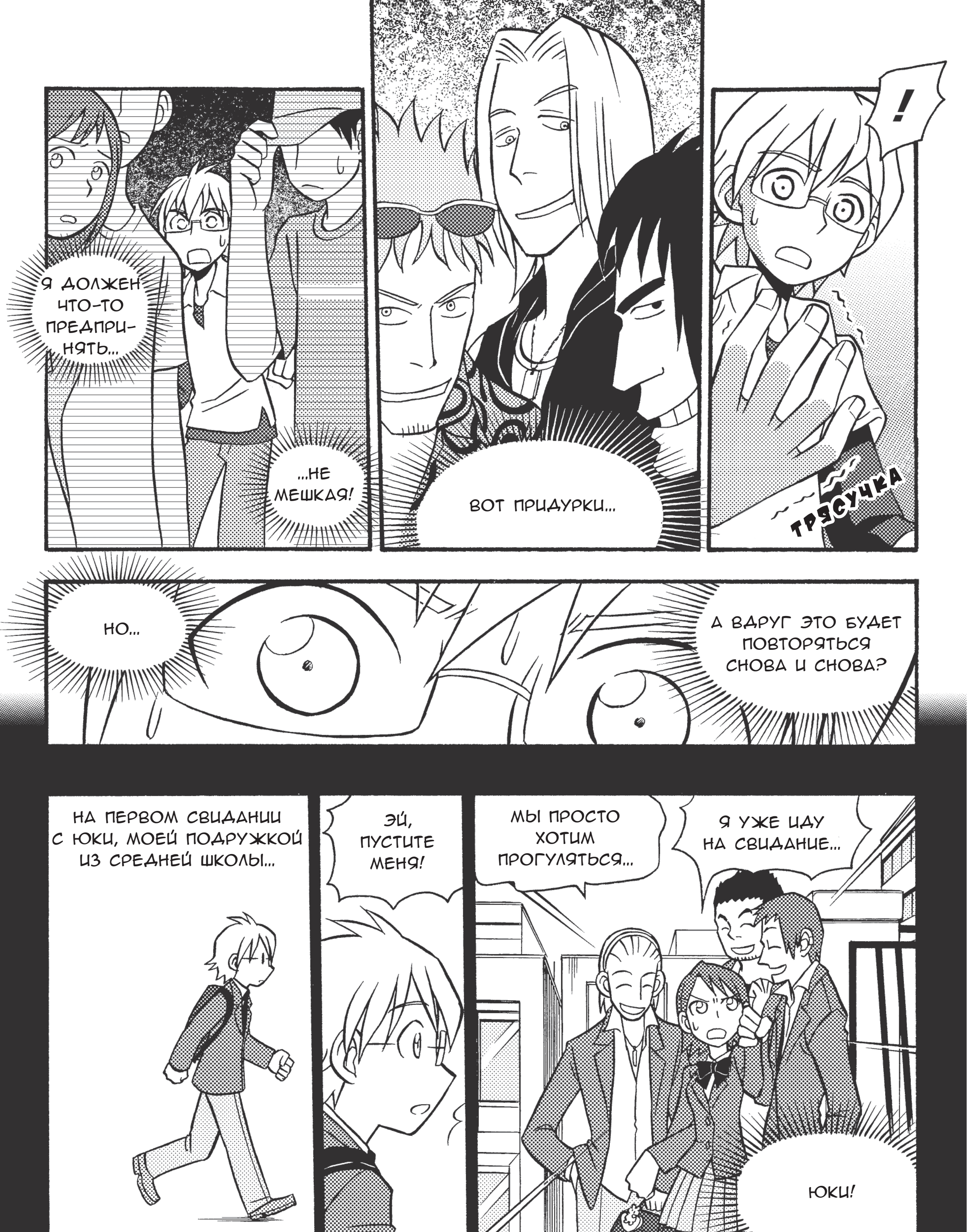
для $\lambda = 1$, нет достаточного числа линейно независимых собственных векторов, чтобы представить

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ в виде } \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Важно заметить, что все матрицы простой структуры $n \times n$ всегда имеют n линейно независимых собственных векторов. Другими словами, всегда существует некий базис в R^n, состоящий только из собственных векторов, называемый *eigenbasis*.

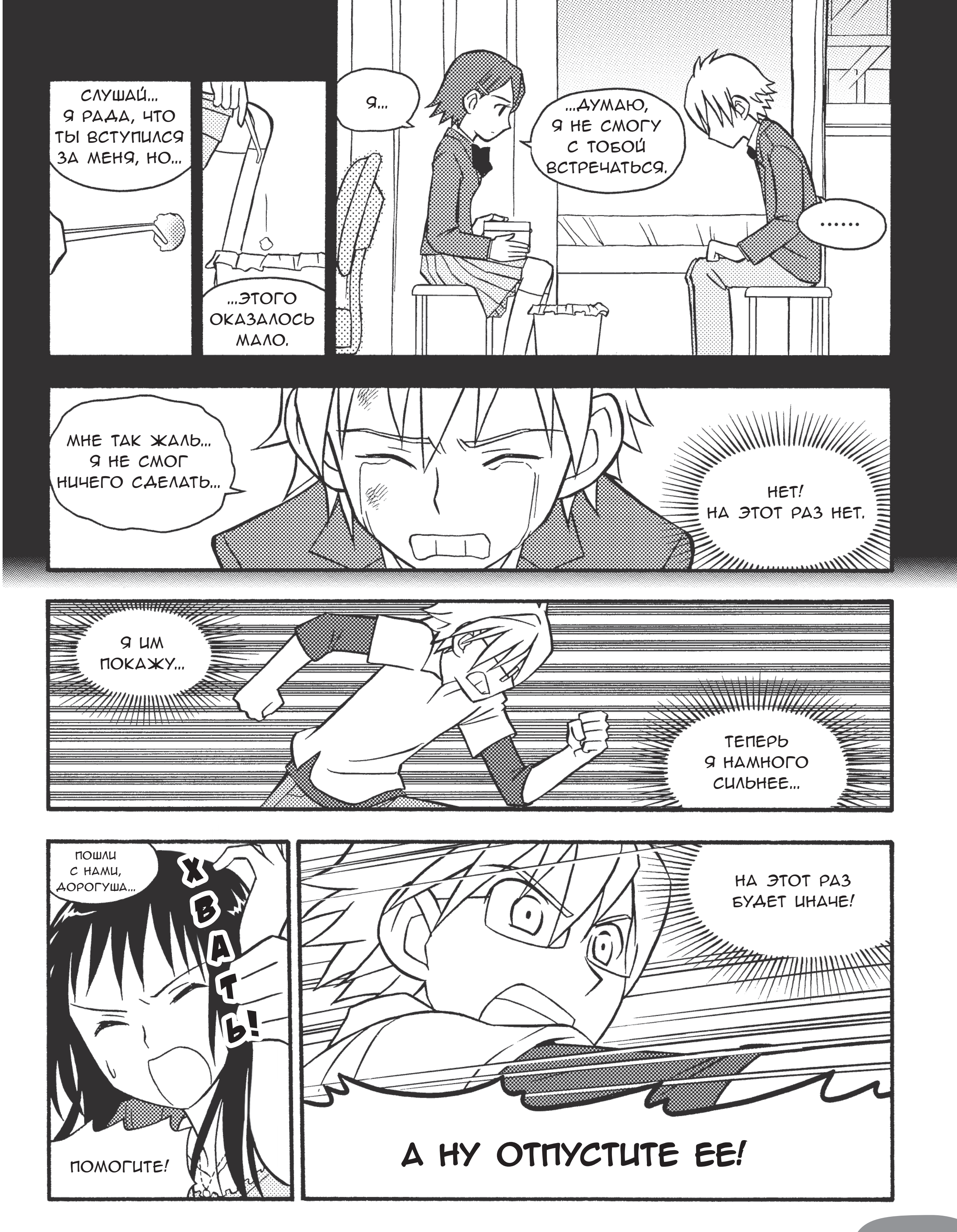
ЭПИЛОГ

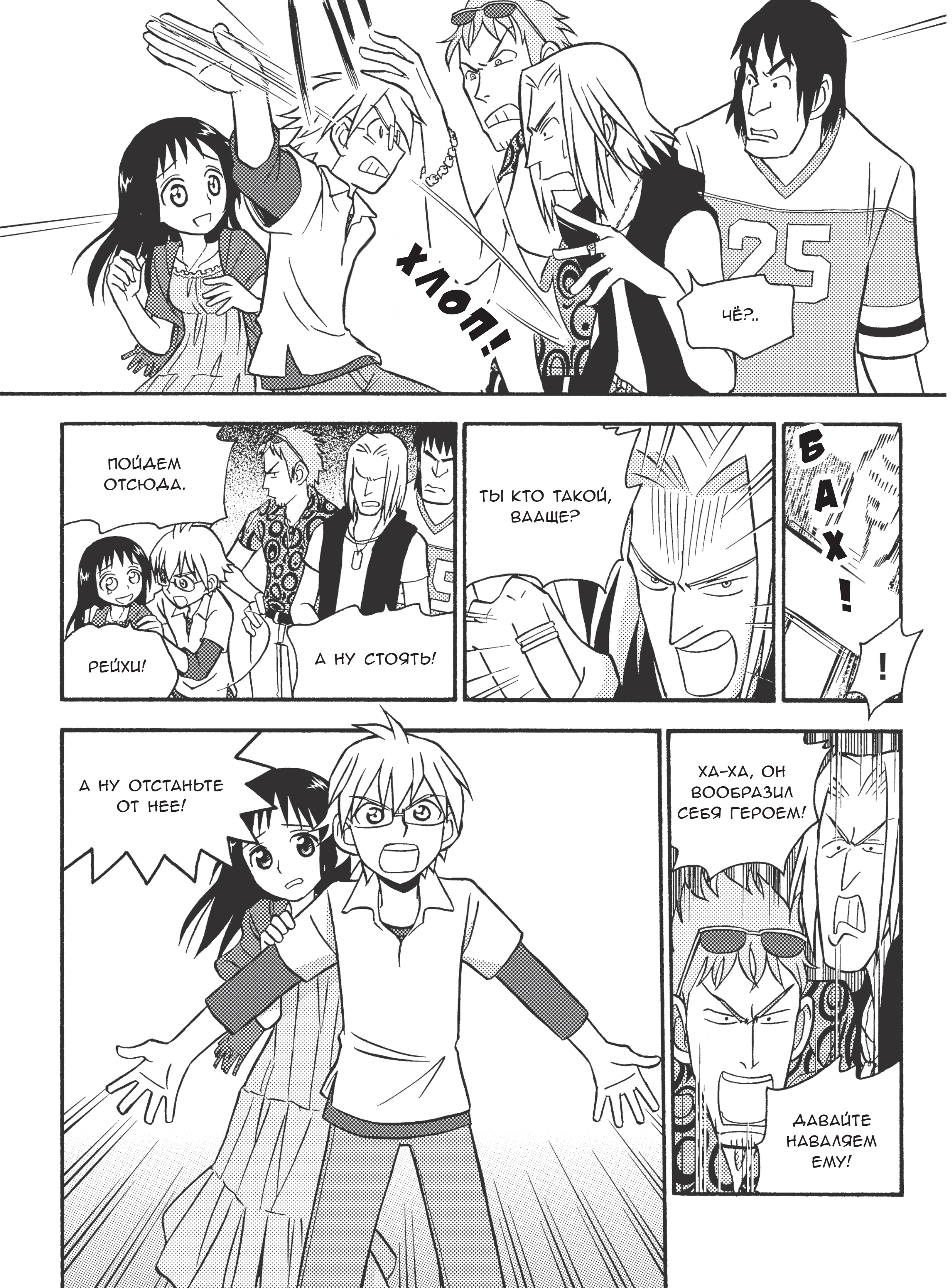

КАЖЕТСЯ, Я УЖЕ БЫЛА ТУТ РАНЬШЕ...
ЭЙ, ТЫ ТУТ ДАВНО СТОИШЬ?
РЕЙХ...
КИЙЯЯ!
ЗНАКОМЫЙ ГОЛОС!
НУ, ЧЕГО ТЫ, НЕ БУДЬ ПАИНЬКОЙ!
ХВАТИТ! ПУСТИТЕ МЕНЯ!
МЫ ПРОСТО ХОТИМ ПОЗНАКОМИТЬСЯ ПОБЛИЖЕ.
МИСА!

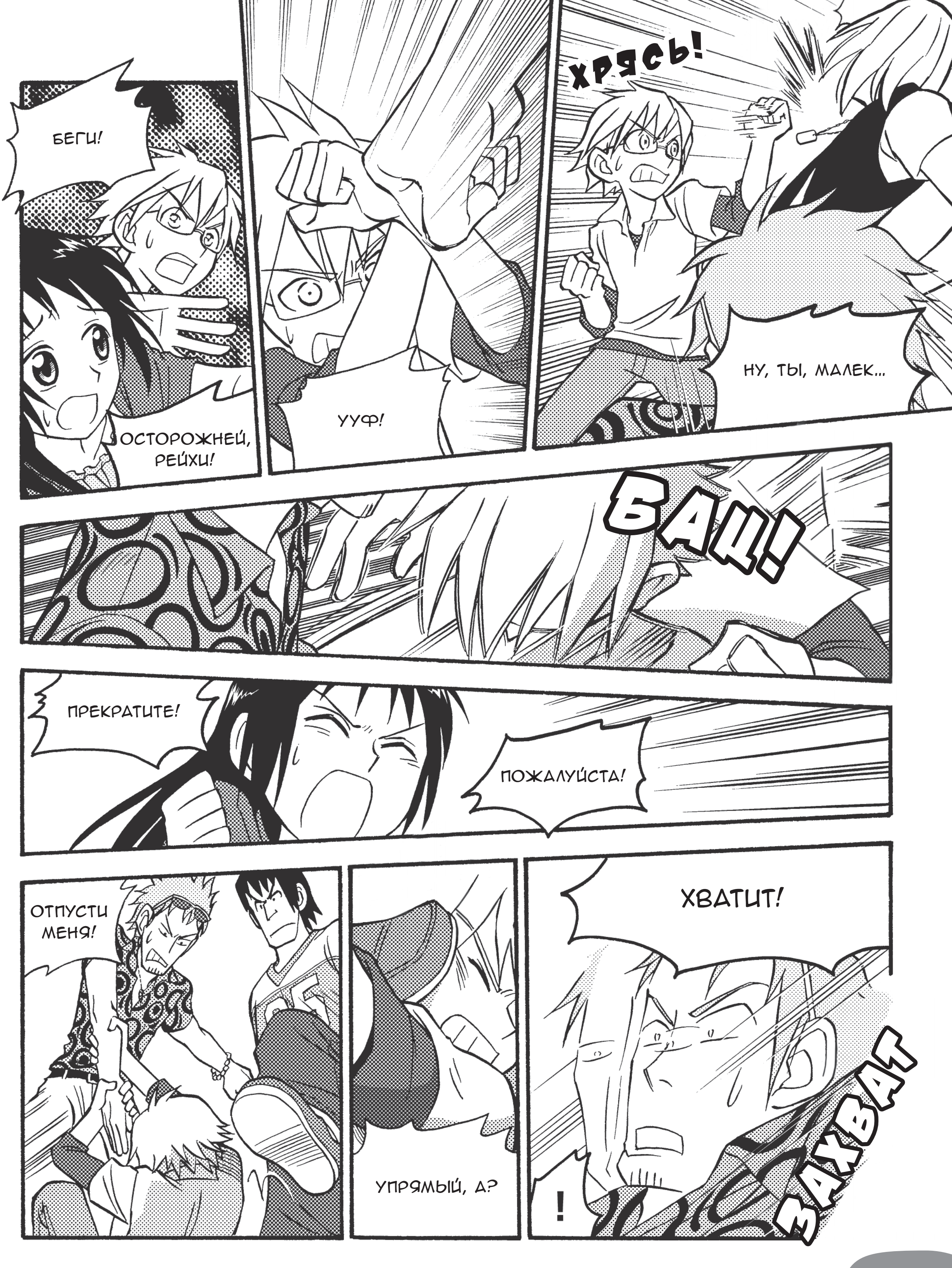

Я должен что-то предпринять...
...не мешкая!
Вот придурки...
!
Трясучка
Но...
А вдруг это будет повторяться снова и снова?
На первом свидании с Юки, моей подружкой из средней школы...
Эй, пустите меня!
Мы просто хотим прогуляться...
Я уже иду на свидание...
Юки!

ВОТ ПРИДУРКИ...
НАДО ЧТО-ТО ДЕЛАТЬ!
ТЫ... А НУ ХВАТИТ!
А ЭТО ЕЩЕ КТО?
ХРЯСЬ!
А?
ХА-ХА!
ХРЯСЬ!
СЕРЬЕЗНО? ОТ ОДНОГО УДАРА? СЛАБАК...
НАМ ПОРА.
ПУСТИТЕ!
ЭЙ, ТЫ!


А НУ ХВАТИТ. ЧТО, РАЗВЕ НЕ ПОНЯТНО, ЧТО ОНА НЕ ХОЧЕТ ИДТИ С ВАМИ?
КТО ТАМ ЕЩЕ?
О, НЕТ!
ЭТО ТЫЫЫ...
ЛЕГЕНДА КАРАТЕ-КЛУБА ХАНАМИЧИ.
"ХАНАМИЧИ-МОЛОТ!"
ОН САМЫЙ.
УУУ...
Ханамичи-молот?
С НИМ ЛУЧШЕ НЕ СВЯЗЫВАТЬСЯ!
ПОШЛИ ОТСЮДА!
С-СПАСИБО!
ВСЕ ХОРОШО... НО, ДУМАЮ, ТВОЕМУ ПРИЯТЕЛЮ НУЖЕН ВРАЧ...
СТОН...


СЛУШАЙ... Я РАДА, ЧТО ТЫ ВСТУПИЛСЯ ЗА МЕНЯ, НО...
...ЭТОГО ОКАЗАЛОСЬ МАЛО.
Я...
...ДУМАЮ, Я НЕ СМОГУ С ТОБОЙ ВСТРЕЧАТЬСЯ.
......
МНЕ ТАК ЖАЛЬ... Я НЕ СМОГ НИЧЕГО СДЕЛАТЬ...
НЕТ! НА ЭТОТ РАЗ НЕТ.
Я ИМ ПОКАЖУ...
ТЕПЕРЬ Я НАМНОГО СИЛЬНЕЕ...
ПОШЛИ С НАМИ, ДОРОГУША...
ХВАТЬ!
ПОМОГИТЕ!
НА ЭТОТ РАЗ БУДЕТ ИНАЧЕ!
А НУ ОТПУСТИТЕ ЕЕ!


ХЛОП!
ЧЁ?..
ПОЙДЕМ ОТСЮДА.
РЕЙХИ!
А НУ СТОЯТЬ!
ТЫ КТО ТАКОЙ, ВААЩЕ?
БАХ!
!
А НУ ОТСТАНЬТЕ ОТ НЕЕ!
ХА-ХА, ОН ВООБРАЗИЛ СЕБЯ ГЕРОЕМ!
ДАВАЙТЕ НАВАЛЯЕМ ЕМУ!

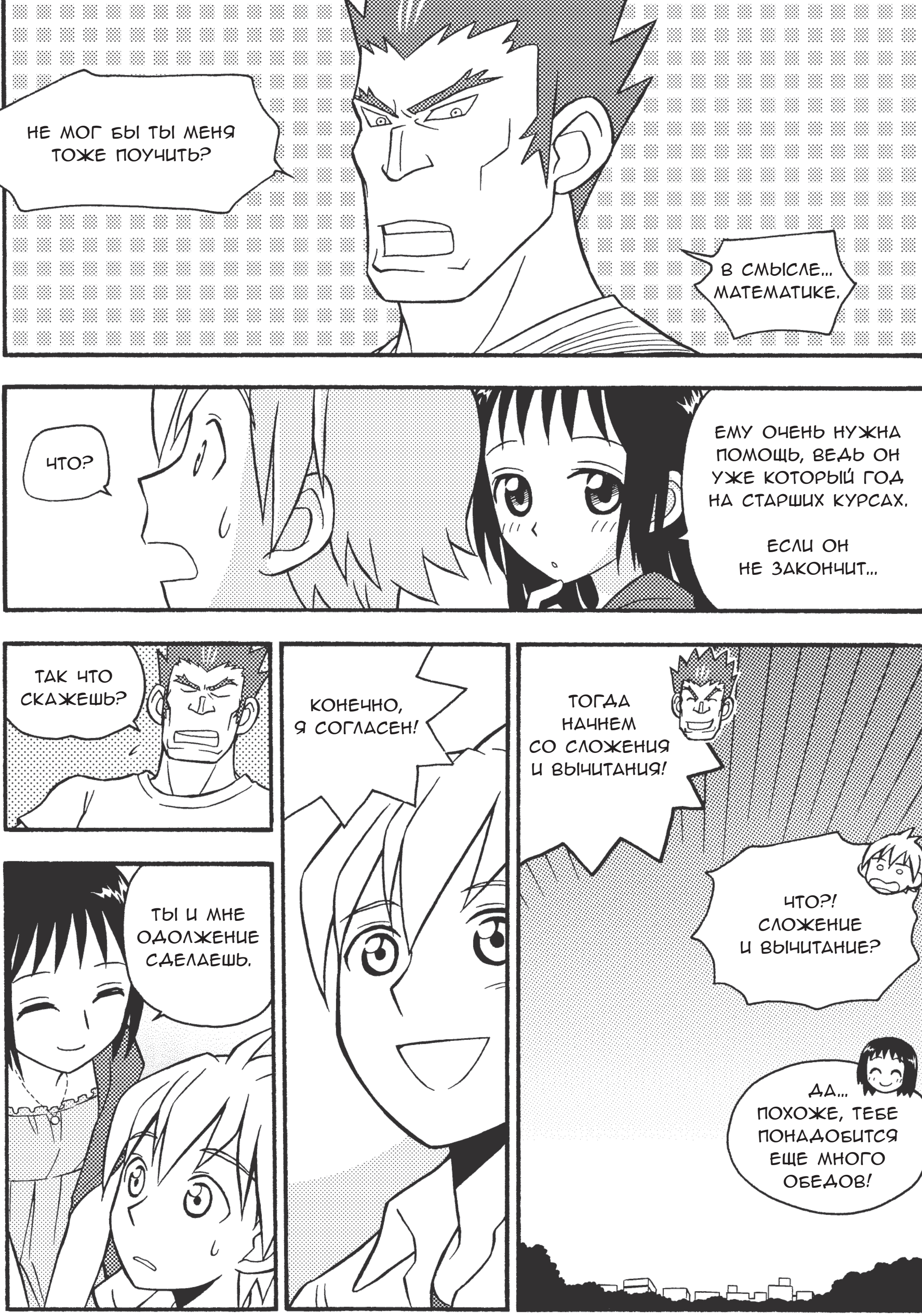

БЕГИ!
ОСТОРОЖНЕЙ, РЕЙХИ!
УУФ!
ХРЯСЬ!
НУ, ТЫ, МАЛЕК...
БАЦ!
ПРЕКРАТИТЕ!
ПОЖАЛУЙСТА!
ОТПУСТИ МЕНЯ!
УПРЯМЫЙ, А?
ХВАТИТ!
!
ЗАХВАТ


ВЫ ЧТО, НАПАЛИ НА МОЮ СЕСТРЕНКУ?
ТЕТСУО!
НЕ ЛЮБЛЮ ИЗЛИШНЕЕ НАСИЛИЕ... НО, НАПАВ НА МОЮ СЕСТРУ, ВЫ МНЕ НЕ ОСТАВИЛИ ШАНСА...
ХРУСТ
ЭТО ИЧИНОСЕ!
ХАНАМИЧИ-МОЛОТ!
МАМА!
БЕЖИМ!
СЕНСЕЙ?
ОЙ, ОН В ОТКЛЮЧКЕ.


РЕЙХИ?
РЕЙХИ, ОЧНИСЬ!
РЕЙХИ!
ТЫ ОЧНУЛСЯ!
ОУ!
ЮУРИНО...
МИСА
РАССКАЗАЛА,
ЧТО СЛУЧИЛОСЬ.
СПАСИБО ТЕБЕ.
МММ...
ДА НЕ ЗА
ЧТО.
НО Я НЕ
ЗАСЛУЖИВАЮ
БЛАГОДАРНОСТИ.


Я НЕ СМОГ ПОМОЧЬ МИСЕ... Я ДАЖЕ СЕБЕ ПОМОЧЬ НЕ СМОГ...
Я НИ КАПЛИ НЕ ИЗМЕНИЛСЯ. ВСЕ ТАКОЙ ЖЕ СЛАБАК.
НУ, МОЖЕТ, У ТЕБЯ ЕЩЕ И НЕ ЧЕРНЫЙ ПОЯС...
НО ТЫ ТОЧНО НЕ СЛАБАК.
ПОСТАВИВ БЕЗОПАСНОСТЬ МИСЫ ВЫШЕ СВОЕЙ, ТЫ ПОКАЗАЛ СВОЮ ХРАБРОСТЬ. ТАКАЯ ХРАБРОСТЬ ДОСТОЙНА ВОСХИЩЕНИЯ,
НЕСМОТРЯ НА ТО ЧТО САМ БОЙ БЫЛ БЕЗУСПЕШНЫЙ.
В ОБЩЕМ, Я ГОРД ЗА ТЕБЯ!
НО...
РЕЙХИ!
ОН ПРАВ.
НЕ ЗНАЮ, ЧТО СКАЗАТЬ... СПАСИБО ТЕБЕ.
МИСА...


СПАСИБО ЗА ВСЕ!
А...
ЧТО ЗА?..
Я, КАЖЕТСЯ, РАЗЪЯСНИЛ ТЕБЕ ПРАВИЛА...
?
А? Я...
ХМ...
НУ, ДУМАЮ, ЛАДНО... МИСА УЖЕ НЕ РЕБЕНОК.
СПАСИБО, СЕНСЕЙ...
КСТАТИ, НЕ МОГ БЫ ТЫ СДЕЛАТЬ ЕЩЕ ОДНО ОДОЛЖЕНИЕ?
К-КОНЕЧНО.


НЕ МОГ БЫ ТЫ МЕНЯ ТОЖЕ ПОУЧИТЬ?
В СМЫСЛЕ... МАТЕМАТИКЕ.
ЧТО?
ЕМУ ОЧЕНЬ НУЖНА ПОМОЩЬ, ВЕДЬ ОН УЖЕ КОТОРЫЙ ГОД НА СТАРШИХ КУРСАХ.
ЕСЛИ ОН НЕ ЗАКОНЧИТ...
ТАК ЧТО СКАЖЕШЬ?
ТЫ И МНЕ ОДОЛЖЕНИЕ СДЕЛАЕШЬ.
КОНЕЧНО, Я СОГЛАСЕН!
ТОГДА НАЧНЕМ СО СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ!
ЧТО?! СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ?
ДА... ПОХОЖЕ, ТЕБЕ ПОНАДОБИТСЯ ЕЩЕ МНОГО ОБЕДОВ!

ПРИЛОЖЕНИЕ

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Постановка задачи

Задача 1

Начнем с матрицы размером 2×2 $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. Используем ее в следующих шести задачах.

1. Вычислить детерминант.
2. Использовать формулу $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ для вычисления обратной матрицы.
3. Найти обратную матрицу с помощью исключения методом Гаусса.
4. Найти все собственные числа и собственные векторы.
5. Выразить данную матрицу в виде $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{-1}$.
6. Решить линейную систему уравнений $\begin{cases} 4x_1 - 1x_2 = 1 \\ 5x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$ с помощью правила Крамера.

Задача 2

Рассмотрим матрицу размером 3×3 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Применим ее для решения следующих задач.

1. Доказать, что векторы столбцов-матриц $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ линейно независимы (т. е. что ранг матрицы равен трем).
2. Вычислить детерминант.

Задача 3

Выяснить, являются ли следующие наборы подпространствами R^3.

1. $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 5\alpha - 7\beta \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} \alpha \text{ и } \beta \text{ – произвольные} \\ \text{действительные числа} \end{matrix} \right\}$.
2. $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 5\alpha - 7 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} \alpha \text{ и } \beta \text{ – произвольные} \\ \text{действительные числа} \end{matrix} \right\}$.

Задача 4

Здесь мы имеем дело с векторами $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ для решения следующего набора заданий.

1. Вычислить расстояние от начала координат до обоих векторов.
2. Вычислить скалярное произведение двух векторов.
3. Вычислить угол между двумя векторами.
4. Вычислить векторное произведение двух векторов.

Решения

Задача 1

1. $\det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = 4\times(-2)-(-1)\times5 = -8+5 = -3$.

2. $\dfrac{1}{4\times(-2)-(-1)\times5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Решение смотри ниже:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Перемножаем строки 1 и 2 и вычитаем строку 2 из строки 1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Перемножаем строки 1 и 5 и строки 2 и 3. Вычитаем строку 1 из строки 2.

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 10 & -5 \\ 0 & -6 & -10 & 8 \end{pmatrix}$$

Делим строку 1 на 15 и строку 1 на –6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

4. Собственные числа – это корни характеристического уравнения

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

И они равны:

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)\times(-2-\lambda)-(-1)\times 5 =$$

$$(\lambda-4)(\lambda+2)+5=$$

$$\lambda^2-2\lambda-3=$$

$$(\lambda-3)(\lambda+1)=0$$

$$\lambda=3,\,-1$$

А. Собственные векторы, соответствующие $\lambda = 3$.

Вставляя наше значение в $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, то есть $\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, получаем $\begin{pmatrix} 4-3 & -1 \\ 5 & -2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1- x_2 \\ 5x_1-5x_2 \end{pmatrix}=[\,x_1-x_2\,]\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Мы видим, что $x_1 = x_2$, и это приводит нас к собственному вектору

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где c_1 – действительное число, не равное нулю.

Б. Собственные векторы, соответствующие $\lambda = -1$.

Подставляя –1 в матрицу, получаем следующее:

$$\begin{pmatrix} 4-(-1) & -1 \\ 5 & -2-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5x_1-x_2 \\ 5x_1-x_2 \end{pmatrix}=[\,5x_1-x_2\,]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $5x_1 = x_2$, и это приводит нас к собственному вектору

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_2 \\ 5c_2 \end{pmatrix}=c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

где c_2 – действительное число, не равное нулю.

5. Из задачи 4:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}.$$

6. Систему линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 - 1x_2 = \ \ 1 \\ 5x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$ можно переписать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Используя методы из задачи 1, мы легко можем получить корни уравнения с помощью правила Крамера.

- $x_1 = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}} = \dfrac{1\times(-2)-(-1)\times(-1)}{-3} = \dfrac{-3}{-3} = 1;$
- $x_2 = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}} = \dfrac{4\times(-1)-1\times5}{-3} = \dfrac{-9}{-3} = 3.$

Задача 2

1. Похоже, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

равен 3, но давайте убедимся в этом с помощью следующей таблицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Прибавим (–2 раз строку 1) к строке 2 и (–3 раз строку 1) к строке 3.

⬇

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & -14 & 2 \end{pmatrix}$$

Прибавим (–2 раз строку 2) к строке 3.

⬇

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & -14 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Прибавим ($\left(-\frac{1}{6}\right)$ раз строку 3) к строке 1 и ($\frac{4}{6}$ раз строку 3) к строке 2.

⬇

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{4}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Прибавим ($\frac{4}{7}$ раз строку 2) к строке 1.

⬇

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Две матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ имеют одинаковый ранг, как было показано на стр. 196–201.

Так как число линейно независимых векторов среди $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, очевидно, равняется 3, ранг обеих $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ также должен быть 3.

Заметим, что решение очевидно на шаге три в таблице, так как треугольные матрицы $n \times n$ с не равными нулю диагональными элементами имеют ранг n. Это также верно для неквадратных матриц.

2. $\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} =$

$1\times1\times(-1)+4\times2\times3+(-1)\times2\times(-2)-(-1)\times1\times3-4\times2\times(-1)-1\times2\times(-2)=$

$-1+24+4+3+8+4=42.$

Задача 3

Предположим, c – это произвольное действительное число.

1. Данная совокупность – это подпространство, так как выполняются оба условия:

1) $c\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ 5\alpha_1-7\beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\alpha_1\\ c\beta_1\\ 5(c\alpha_1)-7(c\beta_1)\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 5\alpha-7\beta\end{pmatrix}\middle|\ \alpha \text{ и } \beta \text{ – произвольные действительные числа}\right\}$;

2) $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ 5\alpha_1-7\beta_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ 5\alpha_2-7\beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_1+\beta_2\\ 5(\alpha_1+\alpha_2)-7(\beta_1+\beta_2)\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 5\alpha-7\beta\end{pmatrix}\middle|\ \alpha \text{ и } \beta \text{ – произвольные действительные числа}\right\}$.

2. Совокупность не является подпространством, поэтому:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ 5\alpha_1-7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ 5\alpha_2-7\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_1+\beta_2\\ 5(\alpha_1+\alpha_2)-14\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_1+\beta_2\\ 5(\alpha_1+\alpha_2)-7\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 5\alpha-7\end{pmatrix}\middle|\ \alpha \text{ и } \beta \text{ – произвольные действительные числа}\right\}.$$

Задача 4

1. $\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$.

$\left\|\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{4^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{16+1+4}=\sqrt{21}$.

2. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}=1\times4+2\times1+3\times(-2)=4+2-6=0$.

3. Угол между $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$ можно вычислить с помощью формулы скалярного произведения следующим образом:

$$\cos\theta=\frac{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\|\times\left\|\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}\right\|}=\frac{0}{\sqrt{14}\times\sqrt{21}}=0.$$

Поскольку косинус угла равен 0, то сам угол равен 90°.

4. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times(-2)-1\times3\\3\times4-(-2)\times1\\1\times1-4\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-3\\12+2\\1-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\14\\-7\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Книги издательства «ДМК Пресс» можно заказать
в торгово-издательском холдинге «Планета Альянс» наложенным платежом,
выслав открытку или письмо по почтовому адресу:
115487, г. Москва, 2-й Нагатинский пр-д, д. 6А.
При оформлении заказа следует указать адрес (полностью), по которому
должны быть высланы книги; фамилию, имя и отчество получателя.
Желательно также указать свой телефон и электронный адрес.
Эти книги вы можете заказать и в интернет-магазине: **www.alians-kniga.ru**.
Оптовые закупки: тел. **(499) 782-38-89**.
Электронный адрес: **books@alians-kniga.ru**.

Син Такахаси (автор), Ироха Иноуэ (художник)

Занимательная математика

Линейная алгебра

Манга

Главный редактор *Д. А. Мовчан*
dmkpress@gmail.com
Научный редактор *И. А. Сенников*
Переводчики *Т. И. Сенникова, А. С. Слащева*
Корректор *Г. И. Синяева*
Верстальщик *А. А. Чаннова*

Формат 70×100 1/16.
Гарнитура Anime Ace. Печать офсетная.
Усл. п. л. 25,5. Тираж 500 экз.

Веб-сайт издательства www.dmkpress.com